

Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Муниципальный этап, теоретический тур
2023/2024 учебный год
10 класс

Решения задач и критерии их оценивания

№ 1. «Созвездия и яркие звезды (для 10-го класса)»

Условие. На рис. 1 представлен фрагмент звездной карты с указанием границ созвездий.

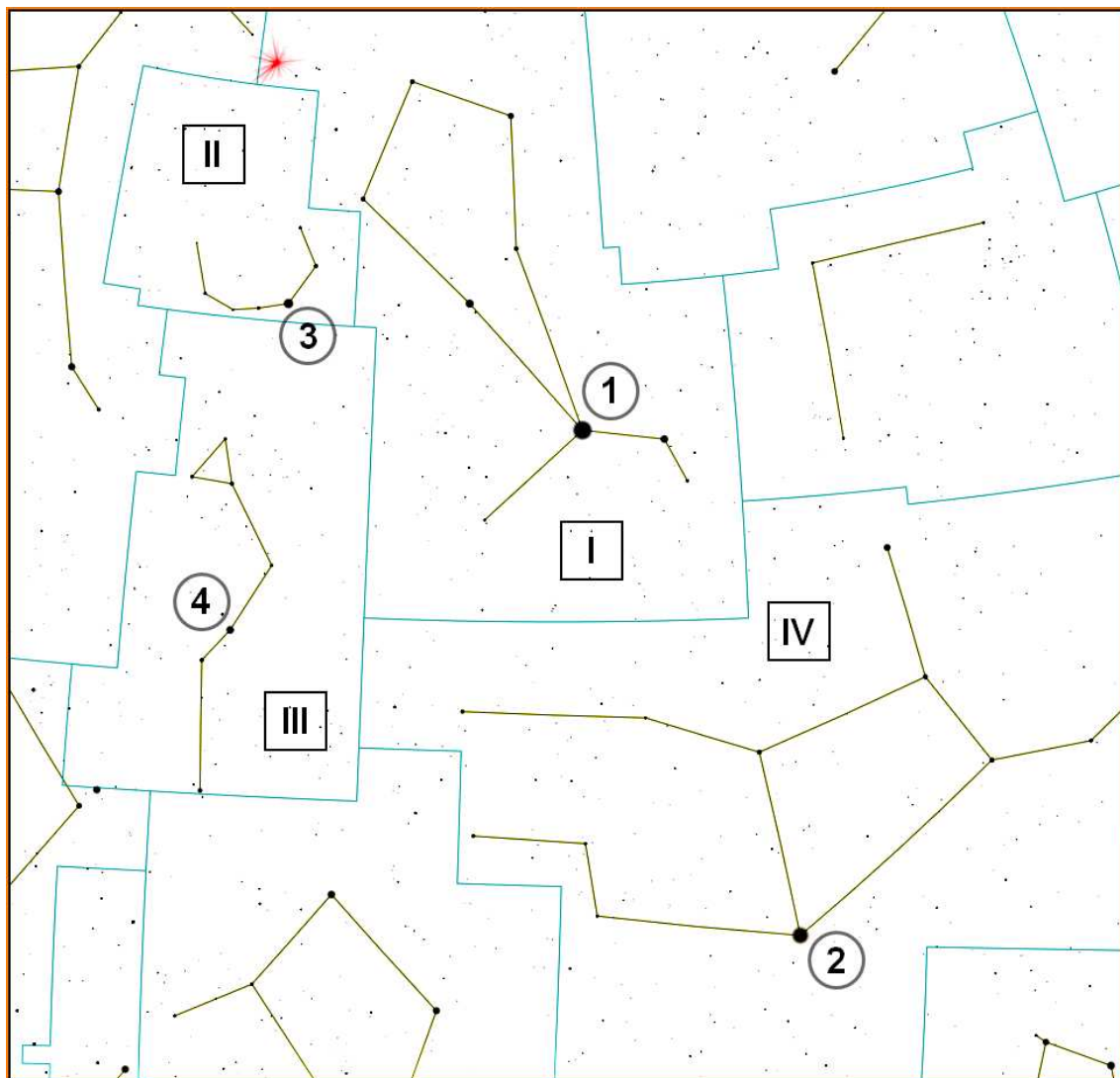


Рис. 1. К задаче №1.

1. Сопоставьте участкам звездного небосвода, отмеченным на рис. 1 римскими цифрами I–IV, названия созвездий, представленных в табл. 1. Свои ответы запишите в табл. 2. (1 балл за правильно названное созвездие)

А) Лисичка	Б) Геркулес	В) Лира	Г) Северная Корона
Д) Орел	Е) Волопас	Ж) Ворон	З) Волосы Вероники
И) Змея	К) Дельфин	Л) Скорпион	М) Дева

Таблица 1. Названия некоторых созвездий земного небосвода.

2. Сопоставьте некоторым ярким звездам (обозначенным черными жирными точками), отмеченным на рис. 1 арабскими цифрами 1 – 4, их названия, представленные в табл. 3. Свои ответы запишите в табл. 4. (2 балла за правильно названную звезду)

Созвездие	I	II	III	IV
Название				

Таблица 2. К определению ответов на первый вопрос задачи.

A) Вега	B) Нави	C) Спика	D) Кастор
E) Альдебаран	F) Гемма	G) Денеб	H) Поллукс
J) Унук аль Хай	K) Садр	L) Арктур	M) Альтаир

Таблица 3. Названия некоторых ярких звезд земного небосвода.

Звезда	1	2	3	4
Название				

Таблица 4. К определению ответов на второй вопрос задачи.

Решение. Идентификацию звезд и созвездий легче всего провести, опираясь на известные астеризмы, бросающиеся в глаза. Прямо по центру в верхней части кадра легко читаемый и узнаваемый астеризм созвездия Волопаса – «парашют» или «палица». В левом верхнем углу располагается не менее известный астеризм, напоминающий «лошадиную подкову» и являющийся центральной частью созвездия Северной Короны.

В левой части фрагмента звездной карты, на уровне его «экватора», отчетливо видна западная часть созвездия Змеи, характерный треугольник из звезд, образует астеризм – «Голова Змеи». Наконец, в правой нижней части фрагмента звездной карты бросается в глаза четырехугольник, напоминающий тело «человека с распростертыми руками и ногами» – это легко узнаваемый астеризм созвездия Девы.

Самой яркой звездой созвездия Волопаса является Арктур (1), созвездия Девы – Спика (2). Самой яркой звездой созвездия Северной Короны является Гемма (3), а в созвездии Змеи – Унук аль Хай (4). Тот же фрагмент карты с правильным указанием названий искомых созвездий и звезд представлен на рис. 2.

Правильно заполненные таблицы задания представляются в виде:

Созвездие	I	II	III	IV
Название	E) Волопас	G) Северная Корона	I) Змея	M) Дева

Таблица 5. К определению правильных ответов на первый вопрос задачи.

Звезда	1	2	3	4
Название	L) Арктур	C) Спика	F) Гемма	J) Унук аль Хай

Таблица 6. К определению правильных ответов на второй вопрос задачи.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
За каждое правильно названное созвездие/звезду (допускается указание лишь заглавных букв – нумераторов позиций)	1/2(4/8)
Максимальный балл за задачу	12

№ 2. «Противосолнечная точка и ее положения (10 класс)»

Условие. Как известно, *противосолнечной точкой* называется точка небосвода, расположенная диаметрально противоположно по отношению к Солнцу, с точки зрения земного наблюдателя. С использованием диаграммы видимого положения Солнца относительно зодиакальных созвездий (см. рис. 3), определите:

1. С какой точкой небосвода должна совпасть противосолнечная точка в момент наступления весеннего равноденствия? (2 балла)

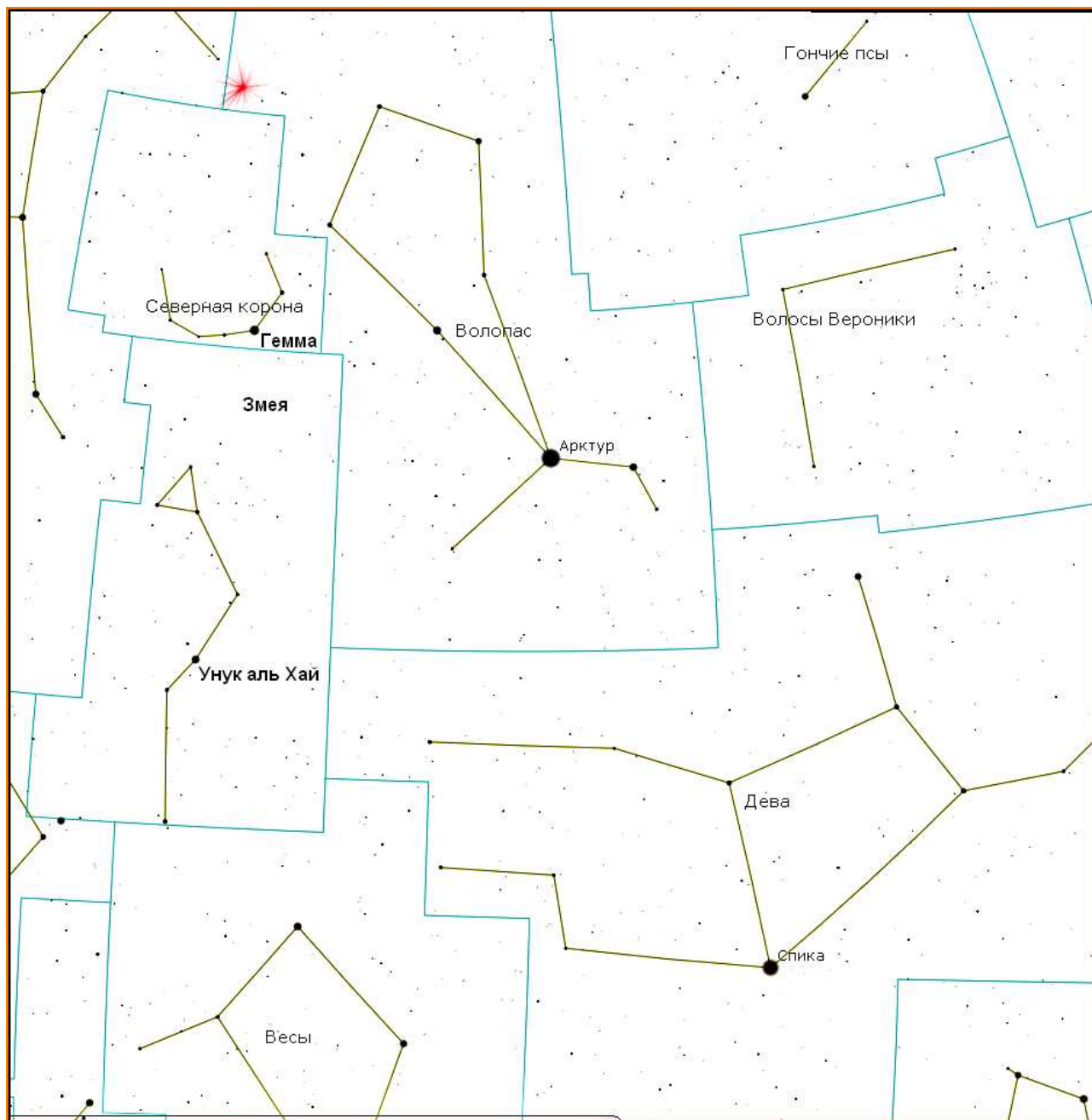


Рис. 2. К определению ответов на вопросы задачи №1.

Варианты ответов:

1. Точка весеннего равноденствия	2. Точка летнего солнцестояния
3. Точка осеннего равноденствия	4. Точка зимнего солнцестояния

2. В каком созвездии противосолнечная точка описывает наибольшую дугу эклиптики, если считать ее движение по эклиптике равномерным? Чему равна угловая мера этой дуги? Ответ представить в градусах, округлив до целых. (4 балла)

1. Овен	2. Телец	3. Близнецы	3. Рак
5. Лев	6. Дева	7. Весы	8. Скорпион
9. Змееносец	10. Стрелец	11. Козерог	12. Водолей
13. Рыбы	—	—	—

3. В каком созвездии противосолнечная точка пребывает в день рождения Иоганна Кеплера – 22 апреля? (2 балла)

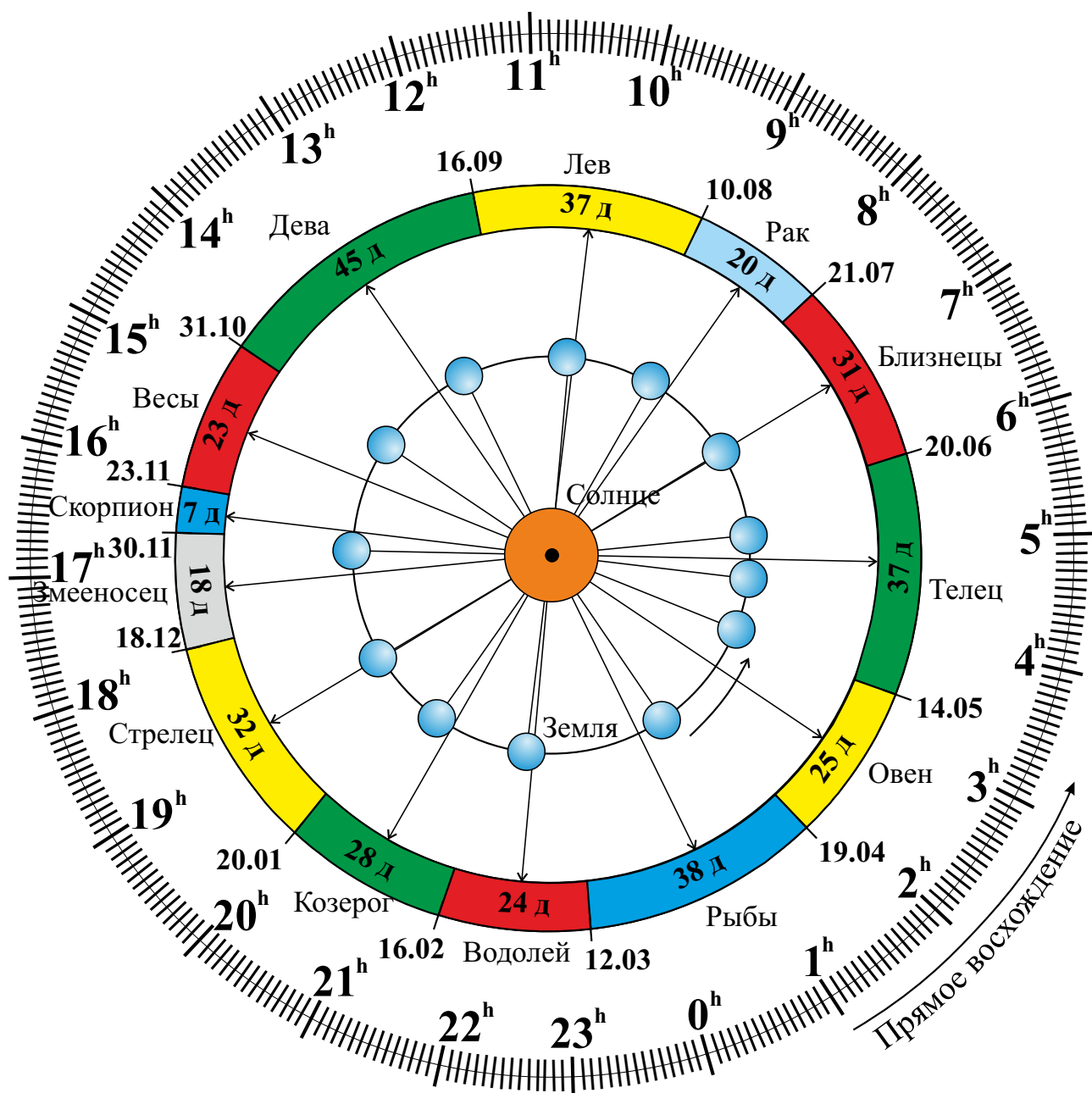


Рис. 3. Диаграмма видимого движения Солнца по зодиакальным созвездиям для наблюдателя, смотрящего с северного полюса эклиптики (здесь Земля движется против часовой стрелки, указано стрелкой; на рисунке видно ее северное полушарие); длинными прямыми стрелками указаны направления проецирования Солнца на зодиакальные созвездия с точки зрения земного наблюдателя; указанные даты отвечают начальному моменту пребывания Солнца в данном созвездии. Продолжительность пребывания в созвездии указана в сутках (днях); указана шкала прямых восхождений.

1. Овен	2. Телец	3. Близнецы	3. Рак
5. Лев	6. Дева	7. Весы	8. Скорпион
9. Змееносец	10. Стрелец	11. Козерог	12. Водолей
13. Рыбы	–	–	–

4. Чему равно прямое восхождение противосолнечной точки 6 августа? Ответ представить в часах, округлив до целого. (3 балла)

5. Ригель – одна из ярчайших звезд ночного небосвода, экваториальные координаты которой есть $\alpha_* = 5^h 15^m$, $\delta_* = -08^\circ 12'$. В какое время года условия наблюдений этой звезды являются оптимальными? Свой ответ поясните. (6 баллов)

Пояснение: условия наблюдений небесного тела считаются *оптимальными*, если данное тело наблюдается в полночь (при этом Солнце опускается максимально глубоко под горизонт, т.е. находится в *нижней кульминации*) на наибольшей высоте над горизонтом (находится в своей *верхней кульминации*).

Варианты ответов:

1. Весна	2. Лето	3. Осень	4. Зима
----------	---------	----------	---------

6. Через какое количество суток после момента наступления оптимальных условий наблюдений Ригеля наступит соответствующий момент для Арктура ($\alpha_* = 14^h 16^m$, $\delta_* = +19^\circ 11'$)? (3 балла)

Решение. 1. В момент наступления весеннего равноденствия Солнце находится в точке весеннего равноденствия, а значит противосолнечная точка должна совпасть с диаметрально противоположной точкой по отношению к указанной – с точкой осеннего равноденствия.

2. Если считать движение противосолнечной точки по эклиптике равномерным, то наибольшую дугу эклиптики оно описывает в том созвездии, в котором находится наибольшее количество времени, т.е. в созвездии *Девы*. Согласно диаграмме рис. 3, противосолнечная точка также как и Солнце пребывает в данном созвездии 45 суток. Учитывая, что всю эклиптику противосолнечная точка (Солнце) проходит за 365.24 суток, то величина этой дуги эклиптики имеет значение: $360^\circ \times (45/365.24) \approx 44^\circ$.

3. В день рождения Иоганна Кеплера (22 апреля) Солнце находится в созвездии Овна, а противосолнечная точка должна располагаться в диаметрально противоположной точке небосвода, то есть в созвездии *Девы*.

4. Согласно той же диаграмме, 6 августа прямое восхождение Солнца составляет приблизительно 9 часов, значит прямое восхождение противосолнечной точки должно быть больше на 12 часов и соответственно составлять 21 час.

5. Испытуемый может сразу назвать искомый сезон. Если он затрудняется это сделать сразу, то достаточно заметить, что если Солнце и данная звезда находятся в разных кульминациях одновременно, значит они располагаются в противоположных сторонах небосвода, следовательно их прямые восхождения должны отличаться на 12 часов. Значит, прямое восхождение Солнца в момент достижения оптимальных условий наблюдений звезды будет

$$\alpha_{\odot} = \alpha_* + 12^h = 17^h 15^m.$$

По диаграмме (см. рис. 3) определяем положение Солнца – оно должно находиться в созвездии *Стрельца* в первой декаде декабря, т.е. искомое время года – *зима*.

6. Оптимальные условия наблюдений Ригеля наступают в момент, когда прямое восхождение Солнца составляет $\alpha_{\odot}^{(1)} = 17^h 15^m$, а для Арктура – в момент, когда его $\alpha_{\odot}^{(2)} = 14^h 16^m - 12^h = 2^h 16^m$. Следовательно за указанный промежуток времени изменение прямого восхождения Солнца должно составить $\Delta\alpha_{\odot} = \alpha_{\odot}^{(2)} + 24^h - \alpha_{\odot}^{(1)} = 9^h 1^m$. Учитывая далее, что за 365.24 суток прямое восхождение Солнца изменяется на 24 часа, а движение Солнца по эклиптике является равномерным, то искомое количество суток можно вычислить так

$$N = \left[\frac{365.24 \text{ сут}}{24^h} 9^h 1^m \right] + 1 = 138 \text{ сут},$$

что соответствует концу апреля.

Ответ: 1) Точка осеннего равноденствия; 2) Дева, 44° ; 3) Дева; 4) 21^h ; 5) зима; 6) 138 сут.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Правильный ответ на вопрос №1,3	2(4)
Правильно названо созвездие + корректно вычислена угловая мера дуги в вопросе №2	2+2
Корректно определено прямое восхождение противосолнечной точки 6 августа	3

Рекомендации для жюри (продолжение).

Выполненная часть решения задачи	Балл
Явно указано, что Ригель и Солнце должны располагаться в противоположных сторонах небосвода + вычислено прямое восхождение Солнца + корректно определен сезон года	2+2+2(6)
Получено корректное значение для искомого промежутка времени в вопросе №6	3
Максимальный балл за задачу	20

№ 3. «Самодельный телескоп из очковых стекол»

Условие. Одинмышленный самарский школьник решил построить самодельный телескоп из очковых стекол. Для этого он решил использовать в качестве объектива два мениска с оптической силой $D_1 = +0.50$ дптр, сложенных вплотную выпуклой стороной наружу. В качестве окуляра решил использовать небольшую линзу с оптической силой $D_2 = +20$ дптр. Чтобы минимизировать влияние хроматической аберрации на изображение, он вставил диафрагму диаметром 40 мм между менисками.

Определите:

1. Фокусные расстояния объектива и окуляра телескопа (в метрах). (3 балла)
2. Угловое увеличение телескопа. (2 балла)
3. Разрешающую (дифракционную) способность объектива (в угловых секундах). (2 балла)
4. Во сколько раз больше света собирает данный телескоп нежели невооруженный глаз школьника? Диаметр зрачка школьника в ночное время составляет 6 мм. (2 балла)
5. Проницающую силу телескопа (в звездных величинах). Проницающую силу человеческого глаза принять равной $m_y = +6^m$. (2 балла)
6. Чему должна быть равна минимальная длина (в сантиметрах) телескопа во время наблюдения Луны? (3 балла)

Решение. 1. Фокусное расстояние окуляра можно вычислить непосредственно, опираясь на формулу его связи с оптической силой линзы:

$$f_{\text{Ок}} = \frac{1}{D_2} = 0.05 \text{ м.} \quad (1)$$

Учитывая, что очковые мениски со столь малой оптической силой является, очевидно, тонкими линзами, сведенными вплотную, оптическую силу объектива можно определить так

$$D_{\text{Об}} = D_1 + D_1 = 2D_1 = 1 \text{ дптр.}, \Rightarrow f_{\text{Об}} = \frac{1}{D_{\text{Об}}} = 1 \text{ м.} \quad (2)$$

2. Угловое увеличение телескопа можно вычислить по формуле:

$$\Gamma = \frac{f_{\text{Об}}}{f_{\text{Ок}}} = 20\times. \quad (3)$$

3. Разрешающая (дифракционная) способность объектива определяется лишь диаметром рабочей поверхности телескопа. Поскольку объектив был задиафрагмирован, то диаметр диафрагмы и будет определять его разрешающую способность:

$$\beta_{\text{Об}} = 1.22 \frac{\lambda}{D_d} \times 206265'' = 3.5'', \quad (4)$$

здесь в качестве рабочей длины световой волны использовано значение $\lambda = 555$ нм.

4. Очевидно, необходимо вычислить отношение количеств энергий, собираемых объективом телескопа и невооруженным глазом человека за единицу времени. По сути, необходимо вычислить

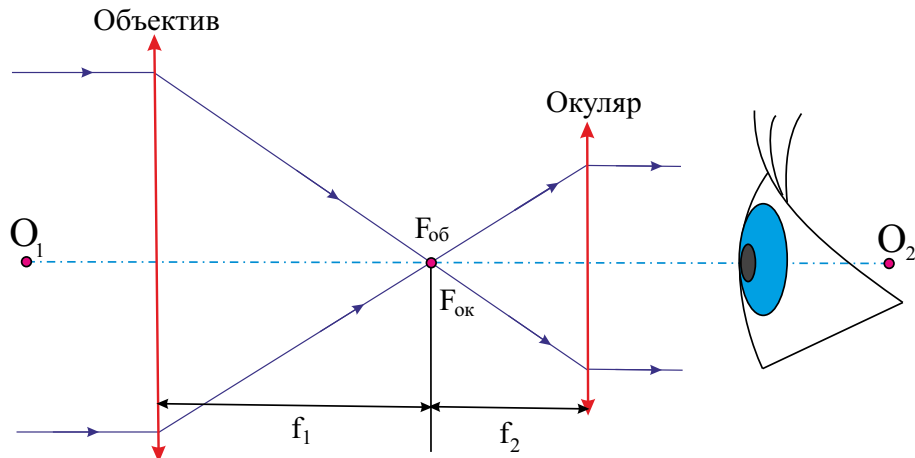


Рис. 4. К определению оптической схемы трубы Кеплера.

отношение световых потоков, собираемых объективом телескопа и невооруженным человеческим глазом:

$$\eta = \frac{\Phi_{\text{Об}}}{\Phi_y} = \frac{E_0 \cdot S_{\text{Об}}}{E_0 \cdot S_y} = \left(\frac{D_d}{D_y} \right)^2 = 44.4, \quad (5)$$

здесь E_0 – освещенность, создаваемая каким-либо источником света небосвода; $S_{\text{Об}}/S_y$ – площади рабочих поверхностей объектива телескопа и зрачка школьника; D_d/D_y – диаметры рабочих поверхностей объектива телескопа (по сути, диафрагмы) и зрачка школьника (согласно условию задачи, $D_y = 6$ мм).

5. Для определения проникающей силы телескопа воспользуемся формулой Погсона:

$$m_T - m_y = -2.5 \lg \left(\frac{E_T}{E_y} \right), \Rightarrow m_T - m_y = -2.5 \lg \left(\frac{\Phi_T S_y}{S_{\text{Об}} \Phi_y} \right), \Rightarrow m_T - m_y = 5 \lg \left(\frac{D_d}{D_y} \right),$$

при записи последнего результата было учтено равенство потоков ($\Phi_T = \Phi_y$) излучения, принимаемых человеческим глазом непосредственно (Φ_y) и через телескоп (Φ_T), поскольку порог чувствительности человеческого глаза определяется именно некоторым фиксированным значением интегрального потока; E_T/E_y – освещенность, создаваемая в фокальной плоскости объектива/на сетчатке глаза точечным небесным источником света.

$$m_T = m_y + 5 \lg D_d - 5 \lg D_y, \Rightarrow m_T = 2.1^m + 5^m \lg D_d = 10.1^m. \quad (6)$$

6. По сути, школьник собрал телескоп-рефрактор по схеме Кеплера, представленной на рис. 4. При фокусировке такого телескопа на бесконечность (на Луну), фокальные плоскости объектива и окуляра фактически совпадают. При этом расстояние между объективом и окуляром становится равным сумме фокальных расстояний объектива и окуляра телескопа. Очевидно длина телескопа не может быть меньше этого расстояния. Следовательно, минимальная длина такого телескопа, сфокусированного на Луну, есть

$$L_{\min} = f_1 + f_2 = 105 \text{ см}. \quad (7)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (2)-(7).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректная запись аналитической формулы для фокусного расстояния линзы через ее оптическую силу + правильный численный расчет фокусных расстояний объектива + окуляра	1+1+1
Правильно записана аналитическая формула + выполнен корректный численный расчет углового увеличения телескопа	1+1
Правильно записана аналитическая формула + выполнен корректный численный расчет для разрешающей способности телескопа	1 + 1

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Правильно записана аналитическая формула для η + выполнен ее корректный численный расчет	1 + 1
Правильно записана аналитическая формула для проникающей силы телескопа + выполнен корректной численный расчет	1+1
Явное указание на схему трубы Кеплера + особенность взаимного расположения фокальных плоскостей объектива и окуляра + расчет минимальной длины трубы телескопа	1+1+1
Максимальный балл за задачу	14

№ 4. «Съемка всего небосвода с помощью зеркала»

Условие. Юный астроном-любитель решил с помощью собственного зеркального фотоаппарата (размеры прямоугольной матрицы которого есть 22.3×14.9 мм) решил выполнить ночную фотосъемку всего небосвода Земли. Для этого астроном использовал с зеркальной камерой съемный фотообъектив с фокусным расстоянием 135 мм. Определите:

1. Угловые размеры поля зрения такого девайса (в минутах дуги). (6 баллов)

2. Телесный угол, соответствующий полю зрения фотоаппарата (в кв. град). (4 балла)

3. Минимально возможное количество кадров, которые следует сделать астроному для достижения цели,

а) допускаемое с точки зрения теории (2 балла),

б) необходимое на практике. (2 балла)

Телесный угол, соответствующий всему небосводу, равен 41253 кв. град.

Решение. 1. Рассмотрим оптическую схему "объектив-фотокамера" (см. рис. 5). Здесь $\boxed{1}$ – объект фотообзора, определяющий максимальную угловую высоту h , которую еще может запечатлеть матрица $\boxed{3}$; $\boxed{2}$ – объектив, в фокусе которого расположена матрица (в случае наблюдения небесного тела). Очевидно, что максимальная угловая высота $h = 2\alpha$, причем из $\triangle OAC$ следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB/2}{f} = \frac{b}{2f}, \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{b}{2f} \right], \quad (8)$$

здесь и далее $a = 22.3$ мм, $b = 14.9$ мм – линейные размеры матрицы камеры. В итоге угловая высота и ширина кадра есть

$$h = 2 \arctg \left[\frac{b}{2f} \right] = 6.32^\circ = 379', \quad \ell = 2 \arctg \left[\frac{a}{2f} \right] = 9.44^\circ = 567'. \quad (9)$$

Иногда в качестве характерного углового размера поля зрения камеры используют угловой размер диагонали кадра:

$$d = 2 \arctg \left[\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2f} \right] = 11.35^\circ = 681'. \quad (10)$$

Т.о., угловые размеры поля зрения данного девайса есть $\ell \times h = 567' \times 379'$.

2. Для определения телесного угла рассмотрим рис. 6. Здесь $ABCD$ – прямоугольник, определяющий границы поля зрения камеры на расстоянии $OF = r$ от последней. Телесный угол Ω

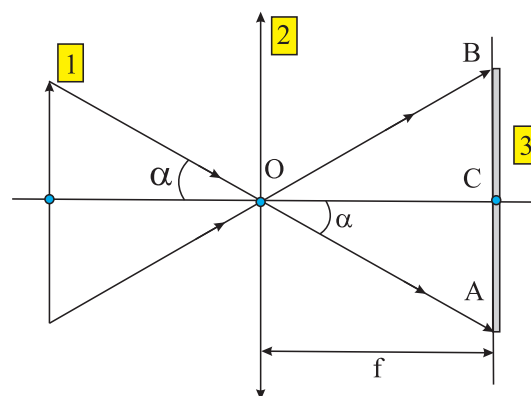


Рис. 5. К определению оптической схемы "объектив-фотокамера".

поля зрения камеры можно (приближенно) определить так

$$\Omega \approx \frac{S_{ABCD}}{r^2}, \quad (11)$$

здесь S_{ABCD} – площадь данного прямоугольника, которую можно записать так

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = EG \cdot JK = \left(2r \cdot \operatorname{tg} \frac{h}{2}\right) \left(2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\ell}{2}\right) = 4r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{h}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\ell}{2},$$

здесь учтено, что

$$EG = 2EF = 2r \operatorname{tg} \frac{h}{2}, \quad JK = 2JF = 2r \operatorname{tg} \frac{\ell}{2}.$$

Из выражения (11) и последнего результата следует, что

$$\Omega_c = 4 \operatorname{tg} \left(\frac{h}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\ell}{2}\right) \approx 4 \sin \left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{\ell}{2}\right). \quad (12)$$

Последний результат является приближенным и, справедлив в случае малых значений углов $\frac{h}{2}$ и $\frac{\ell}{2}$. Точная формула для данного телесного угла должна быть записана так (вывод последней очень сложен и приводится лишь для полноты картины задачи)

$$\Omega = 4 \arcsin \left[\sin \left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{\ell}{2}\right) \right]. \quad (13)$$

Однако, в силу малости углов $\frac{h}{2}$ и $\frac{\ell}{2}$ выражения (12), (13) дают одинаковые значения $\Omega_c = 1.81 \cdot 10^{-2}$ срад = 59.56 кв. град.

3. Минимально возможное количество кадров, которые необходимо сделать для фотосъемки всего небосвода Земли, с точки зрения теории, можно определить как отношение телесного угла, соответствующего всему небосводу, к телесному углу поля зрения одиночного кадра данной фотокамеры:

$$N_{\min}^{(T)} = \frac{\Omega_{\text{Sphere}}}{\Omega_c} = 693 \text{ кадра}, \quad (14)$$

здесь $\Omega_{\text{Sphere}} = 41253$ кв. град. – телесный угол, соответствующий всему небосводу.

4. На практике придется сделать большее количество кадров чем $N_{\min}^{(T)}$, поскольку поле зрения фотоаппарата определялся плоским прямоугольником, а небесная сфера является сферической поверхностью. Выполнить съемку всего небосвода без пересечения полей соседних кадров в действительности невозможно. Минимальное количество кадров, которое необходимо сделать на практике, чтобы сфотографировать весь ночной небосвод, можно определить отношением телесного угла, соответствующего прямоугольной площадке высотой 180° (соответствует протяженности круга склонения от северного до южного полюса мира) и шириной 360° (соответствует протяженности небесного экватора) к телесному углу поля зрения фотоаппарата, т.е.

$$N_{\min}^{(P)} = \frac{180^\circ \times 360^\circ}{\Omega_c} = 1088 \text{ кадров}. \quad (15)$$

Ответ: 1) $\ell \times h = 567' \times 379'$; 2) 59.56 кв. град; к задаче представлен выражениями (14)-(15).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Правильно записана аналитическая формула + выполнен корректный численный расчет для угловой ширины/высоты кадра	2+1/2+1(6)

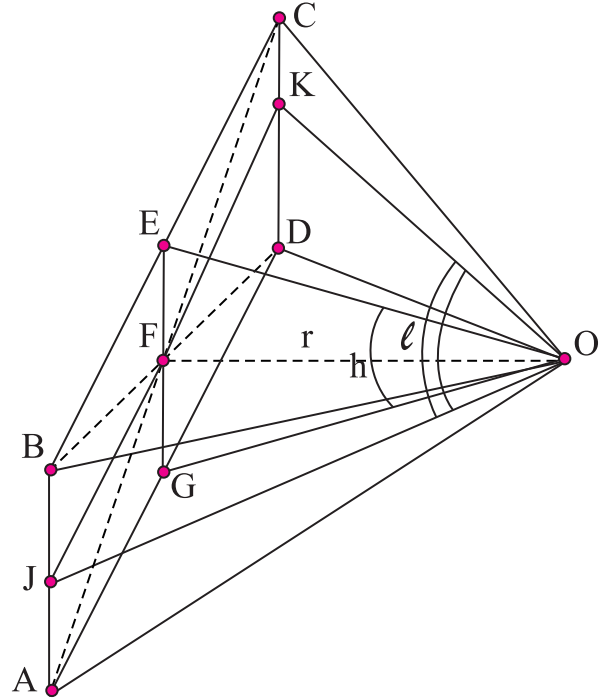


Рис. 6. К определению телесного угла Ω .

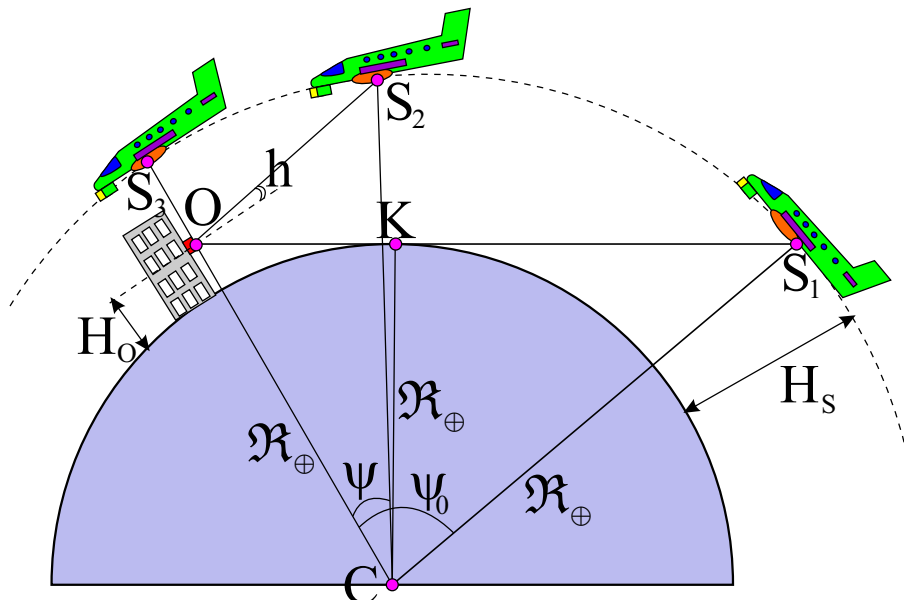


Рис. 7. К определению взаимного расположения наблюдателя, самолета и центра Земли.

Рекомендации для жюри (продолжение).

Выполненная часть решения задачи	Балл
Получена приближенная или точная аналитическая формула + выполнен корректный численный расчет для телесного угла фотоаппарата	3 + 1
Вычислено минимально возможное количество кадров, необходимое с точки зрения теории	2
Вычислено минимально возможное количество кадров, необходимое для реализации на практике	2
Максимальный балл за задачу	14

№ 5. «Новая звезда на горизонте»

Условие. Астроном, наблюдая небосвод в момент навигационных сумерек невооруженным глазом с балкона своего дома (высота $H_O = 20$ м над поверхностью Земли), обнаружил появление точно на видимом горизонте "новой звезды", блеск которой был сравним с Сириусом ($m_* = -1.5^m$). В последствие выяснилось, что это был самолет, который летел точно "на астронома" на постоянной высоте $H_S = 8.0$ км с постоянной скоростью $V = 800$ км/ч. Определите:

1. Расстояние (в км), которое разделяло астронома и самолет, в момент его появления на горизонте. (5 баллов)

2. Промежуток времени (в минутах), отсчитываемый от момента появления самолета, до момента его пролета над головой астронома. (8 баллов)

3. Оцените мощность (в ваттах) прожектора самолета в видимом диапазоне, если последний, в момент появления самолета, был ориентирован точно на астронома и излучал свет в конус с углом раствора $\rho = 15^\circ$? Тело Земли считать шаром. (7 баллов)

Решение. 1. Рассмотрим рис. 7, соответствующий условиям задачи. Здесь в точке O находится наблюдатель, в точке S_1 располагается самолет в начальный момент его наблюдения астрономом; K – это точка касания светового луча поверхности Земли, пришедшего от самолета к астроному в начальный момент времени. Очевидно, искомое расстояние, которое разделяло астронома и самолет, в момент его появления на горизонте, есть $OS_1 = OK + KS_1$ или

$$OS_1 = r_0 = \sqrt{OC^2 - OK^2} + \sqrt{CS_1^2 - CK^2}, \Rightarrow r_0 = \sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + H_O)^2 - \mathfrak{R}_\oplus^2} + \sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + H_S)^2 - \mathfrak{R}_\oplus^2},$$

$$r_0 \approx \sqrt{2\mathfrak{R}_\oplus H_O} + \sqrt{2\mathfrak{R}_\oplus H_S} = 335 \text{ км}, \quad (16)$$

здесь $\mathfrak{R}_\oplus$ – средний радиус Земли, $H_O = 20$ м – высота расположения астронома над поверхностью Земли, $H_S = 8$ км – высота расположения самолета над поверхностью Земли; в расчетах учтено, что $H_O, H_S \ll \mathfrak{R}_\oplus$.

2. Необходимо определить промежуток времени, в течение которого самолет преодолел дугу круговой траектории S_1S_3 , ей соответствует угол ψ_0 . Последний можно представить в виде:

$$\psi_0 = \angle OCK + \angle KCS_1.$$

Для синусов последних углов можно записать формулы вида (для прямоугольных треугольников $\triangle OCK$ и $\triangle KCS_1$):

$$\begin{aligned}\sin \angle OCK &\approx \angle OCK = \frac{OK}{OC} = \frac{\sqrt{2\mathfrak{R}_\oplus H_O}}{\mathfrak{R}_\oplus + H_O} \approx \sqrt{2\frac{H_O}{\mathfrak{R}_\oplus}}, \\ \sin \angle KCS_1 &\approx \angle KCS_1 = \frac{KS_1}{OS_1} = \frac{\sqrt{2\mathfrak{R}_\oplus H_S}}{\mathfrak{R}_\oplus + H_S} \approx \sqrt{2\frac{H_S}{\mathfrak{R}_\oplus}}.\end{aligned}$$

При записи последних формул учтена малость искомых углов. В итоге искомый угол ψ_0 представляется в виде:

$$\psi_0 \approx \sqrt{2\frac{H_O}{\mathfrak{R}_\oplus}} + \sqrt{2\frac{H_S}{\mathfrak{R}_\oplus}} = 5.26 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 3.0^\circ. \quad (17)$$

Относительно центра Земли самолет летел по дуге окружности радиуса $\mathfrak{R}_\oplus + H_S$ с постоянной скоростью V . Значит его геоцентрическая угловая скорость может быть записана в виде:

$$\omega_S = \frac{V}{\mathfrak{R}_\oplus + H_S} = 3.48 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с} = 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ град/с}. \quad (18)$$

Значит искомый промежуток времени можно определить как

$$\tau_S = \frac{\psi_0}{\omega_S} = 1500 \text{ с} = 25.0 \text{ мин}. \quad (19)$$

3. Оценим мощность прожектора самолета в видимом диапазоне, т. е. определим полный световой поток Φ_{tot} , который он отбрасывал вперед относительно направления движения. Последнюю величину можно представить как

$$\Phi_{\text{tot}} = E \cdot S, \quad (20)$$

здесь E – освещенность, создаваемая прожектором на расстоянии r от самолета; S – величина площадки, через которую свет проходил на данном расстоянии. Освещенность определим с использованием формулы Погсона и фотометрических характеристик Солнца:

$$E = f_\odot^{(l)} \cdot 10^{-0.4(m_* - m_\odot^{(l)})} = 4.81 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2,$$

здесь $f_\odot^{(l)} = 600 \text{ Вт/м}^2$ – солнечная постоянная в видимом свете; $m_\odot^{(l)} = -26.74^{\text{m}}$ – соответствующая ей звездная величина (согласно справочным данным). Площадка величиной S представляет собой часть сферы радиуса r , шаровой сегмент, опирающийся на круглый конус с углом раствора ρ . Величину S можно записать через телесный угол Ω раствора конуса:

$$S = r^2 \Omega = 2\pi r^2 (1 - \cos \rho).$$

При $r = r_0$, численный расчет полного светового потока (мощности) дает значение $\Phi_{\text{tot}} = 1156 \text{ Вт}$.

Ответ: к задаче представляется выражениями (16), (19); 1156 Вт.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Получена точная (приближенная) формула для расстояния r_0 + его численный расчет	3 + 2
Правильное определение угла ψ_0 + угловой скорости ω_S + итоговая формула для τ_S + его численный расчет	3+2+2+1
Представлена правильная формула для потока Φ_{tot} + с использованием формулы Погсона получена формула для освещенности + представлена правильная формула для площади освещенной поверхности сферы + корректный численный расчет Φ_{tot}	2+2+2+1
Максимальный балл за задачу	20

№ 6. «Астрономическая единица и изменение большой полуоси земной орбиты»

Условие. До 2012 года под астрономической единицей традиционно принималось среднее расстояние от Земли до Солнца, равное сегодня

$$a_{\oplus} = 1.00000101778 \text{ а.е.}$$

С 2012 года и по настоящее время в качестве астрономической единицы принимается расстояние, равное

$$1 \text{ а.е.} = 149597870700 \text{ м.}$$

Как известно, расстояние между Солнцем и Землей необратимо увеличивается из-за массовых потерь центрального светила. Определите, какое количество лет тому назад, среднее расстояние между данными телами было равным (с точностью до метра) 1 а.е? В расчетах необходимо учесть следующие виды массовых потерь: 1) потери, обусловленные электромагнитным излучением, 2) потери, обусловленные солнечным ветром (основные характеристики солнечного ветра см. в таб. 7). Орбиту Земли считать круговой. (20 баллов)

Параметр	Среднее	Параметр	Среднее
$\bar{v}$, (км/с)	400	η_p	0.96
$n_p, \times 10^6 \text{ (1/м}^3\text{)}$	6.0	η_α	0.04

Примечание: здесь n_p – средняя концентрация протонов, $\bar{v}$ – средняя скорость солнечного ветра на орбите Земли, $\eta_{\{p,\alpha\}}$ – мольные доли протонов и альфа-частиц (основных носителей массы).

Таблица 7. Основные количественные характеристики солнечного ветра.

Решение. 1. Прежде всего, определим текущее значение большой полуоси земной орбиты в метрах

$$a_{\oplus} = 149598022958 \text{ м.} \quad (21)$$

Определим на сколько большая полуось земной орбиты больше 1 а.е.

$$\Delta a = a_{\oplus} - 1 \text{ а.е.} = 152258 \text{ м.} \quad (22)$$

2. Рассмотрим далее движение Земли по круговой орбите. Запишем для нее второй закон Ньютона

$$\frac{m_{\oplus} V_{\oplus}^2}{a_{\oplus}} = \frac{G m_{\oplus} m_{\odot}}{a_{\oplus}^2}, \Rightarrow V_{\oplus}^2 = \frac{G m_{\odot}}{a_{\oplus}}. \quad (23)$$

Далее учтем, что согласно второму закону Кеплера, за равные промежутки времени гелиоцентрический радиус-вектор Земли описывает равные площади, т.е. согласно рис. 8

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = C_0 \text{ или } \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} r_1 \cdot r_2 \sin \Delta \alpha}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \cdot V = C_0, \quad (24)$$

здесь учтено, что $r_1 = r_2 = r$, $\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \omega$, $V = \omega \cdot r$ – гелиоцентрическая скорость Земли; C_0 – некоторая компонента. Из (24) следует, что

$$V = \frac{2 C_0}{r}. \quad (25)$$

Подставим (25) в (23), получаем

$$\frac{4 C_0^2}{a_{\oplus}^2} = \frac{G m_{\odot}}{a_{\oplus}}, \Rightarrow a_{\oplus} = \frac{4 C_0^2}{G m_{\odot}}. \quad (26)$$

Запишем выражение (26) для двух близких моментов времени:

$$t : a_{\oplus} = \frac{4 C_0^2}{G m_{\odot}}; \quad t + \Delta t : a_{\oplus} + \Delta a_{\oplus} = \frac{4 C_0^2}{G(m_{\odot} - \Delta m_{\odot})}.$$

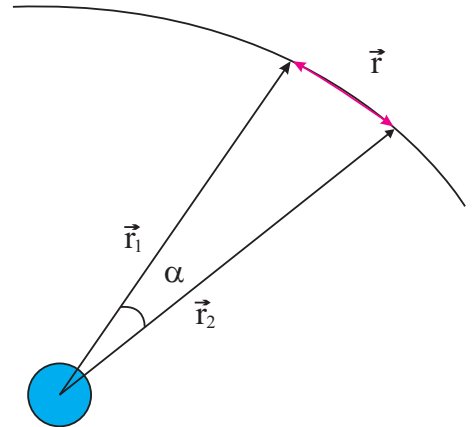


Рис. 8. К определению искомой величины.

Вычтем из второго уравнения первое, тогда получим

$$\Delta a_{\oplus} = \frac{4C_0^2}{G} \frac{\Delta \mathfrak{M}_{\odot}}{(\mathfrak{M}_{\odot} - \Delta \mathfrak{M}_{\odot})\mathfrak{M}_{\odot}} \approx \frac{4C_0^2}{G\mathfrak{M}_{\odot}^2} \Delta \mathfrak{M}_{\odot}, \quad \text{или} \quad \Delta a_{\oplus} = a_{\oplus} \left(\frac{\Delta \mathfrak{M}_{\odot}}{\mathfrak{M}_{\odot}} \right). \quad (27)$$

Т.о., увеличение большой полуоси земной орбиты прямо пропорционально изменению массы Солнца.

3. Далее найдем закон изменения массы Солнца за счет указанных в условии эффектов. Очевидно, что за время Δt изменение массы Солнца есть

$$\Delta \mathfrak{M}_{\odot} = \Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(EM)} + \Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(SW)}, \quad (28)$$

здесь $\Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(EM)}$ – массовые потери Солнца, обусловленные его электромагнитным излучением, $\Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(SW)}$ – массовые потери Солнца, обусловленные истечением солнечного ветра (его корпускулярным излучением). Для определения первого слагаемого воспользуемся формулой Эйнштейна:

$$\Delta E^{(EM)} = \Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(EM)} \cdot c^2.$$

Разделим ее на промежуток времени Δt и учтем что $L_{\odot} = \Delta E^{(EM)} / \Delta t$ – светимость Солнца.

$$L_{\odot} = \frac{\Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(EM)}}{\Delta t} \cdot c^2, \Rightarrow \frac{\Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(EM)}}{\Delta t} = \frac{L_{\odot}}{c^2} = 4.252 \cdot 10^9 \text{ кг/с}. \quad (29)$$

4. Вычислим потери $\Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(SW)}$:

$$\Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(SW)} = m_p \Delta N_p + m_{\alpha} \Delta N_{\alpha}, \quad (30)$$

здесь m_p, m_{α} – массы протона и α -частицы; $\Delta N_p, \Delta N_{\alpha}$ – количества протонов и α -частиц, покинувших Солнце за время Δt . Поскольку поток солнечного ветра стационарный, то далее будем рассматривать его на орбите Земли. За время Δt через сферу радиуса $a_{\oplus}$ (и площадью $S = 4\pi a_{\oplus}^2$) проходит количества ΔN_p протонов, и ΔN_{α} – альфа-частиц, который можно записать так

$$\Delta N_p = n_p \cdot \Delta V = n_p \cdot S \cdot \bar{v} \cdot \Delta t, \quad \Delta N_{\alpha} = n_{\alpha} \cdot S \cdot \bar{v} \cdot \Delta t. \quad (31)$$

Учтем далее, что

$$\eta_p = \frac{\nu_p}{\nu_p + \nu_{\alpha}} = \frac{\Delta N_p}{\Delta N_p + \Delta N_{\alpha}} = \frac{n_p}{n_p + n_{\alpha}}, \quad \eta_{\alpha} = \frac{n_{\alpha}}{n_p + n_{\alpha}}, \quad (32)$$

здесь ν_p, ν_{α} – мольные количества протонов и α -частиц; n_p, n_{α} – их объемные концентрации. Из (32) следует, что

$$\frac{\eta_p}{\eta_{\alpha}} = \frac{n_p}{n_{\alpha}}, \Rightarrow n_{\alpha} = \frac{\eta_{\alpha}}{\eta_p} \cdot n_p, \quad (33)$$

тогда (30) можно переписать так

$$\frac{\Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(SW)}}{\Delta t} = m_p n_p S \bar{v} + m_{\alpha} \frac{\eta_{\alpha}}{\eta_p} n_p S \bar{v} = 4\pi a_{\oplus}^2 \bar{v} \left(m_p + \frac{\eta_{\alpha}}{\eta_p} m_{\alpha} \right) n_p = 1.315 \cdot 10^9 \text{ кг/с}. \quad (34)$$

Следовательно, полный поток массовых потерь Солнца есть

$$\frac{\Delta \mathfrak{M}_{\odot}}{\Delta t} = 5.567 \cdot 10^9 \text{ кг/с}. \quad (35)$$

Тогда скорость изменения радиуса земной орбиты есть

$$V_a = \frac{\Delta a_{\oplus}}{\Delta t} = \frac{a_{\oplus}}{\mathfrak{M}_{\odot}} \left(\frac{\Delta \mathfrak{M}_{\odot}}{\Delta t} \right) = 4.19 \cdot 10^{-10} \text{ м/с} = 0.013 \text{ м/год}. \quad (36)$$

Следовательно, 1 а.е. и $a_{\oplus}$ были равны

$$\tau = \frac{\Delta a}{V_a} = 11.71 \text{ млн лет тому назад.} \quad (37)$$

Ответ: к задаче представлен формулой (37).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректно вычислена разность Δa	2
С использованием второго закона Ньютона получено выражение для орбитальной скорости Земли + с использованием второго закона Кеплера получена связь этой же скорости с гелиоцентрическим расстоянием + установлена прямо пропорциональная зависимость между величиной изменения большой полуоси и изменением массы Солнца	3+3+2
Выполнен расчет скорости массовых потерь Солнца обусловленных его электромагнитным излучением + корпускулярным излучением	3+4
Вычислены скорость изменения большой полуоси орбиты Земли + искомое количество лет	2+1
Максимальный балл за задачу	20

На решение задач данного тура Олимпиады школьникам отводится 4 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса α – частицы – $m_\alpha = 6.645 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 3.261 \text{ св. лет} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли – 1360 Вт/м^2
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – 23 часа 56 минут 04 секунды
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус – 6378.14 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Средний (по объему) радиус – 6371.01 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

§4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$

- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

Дополнительные справочные данные

§9. Уравнение времени

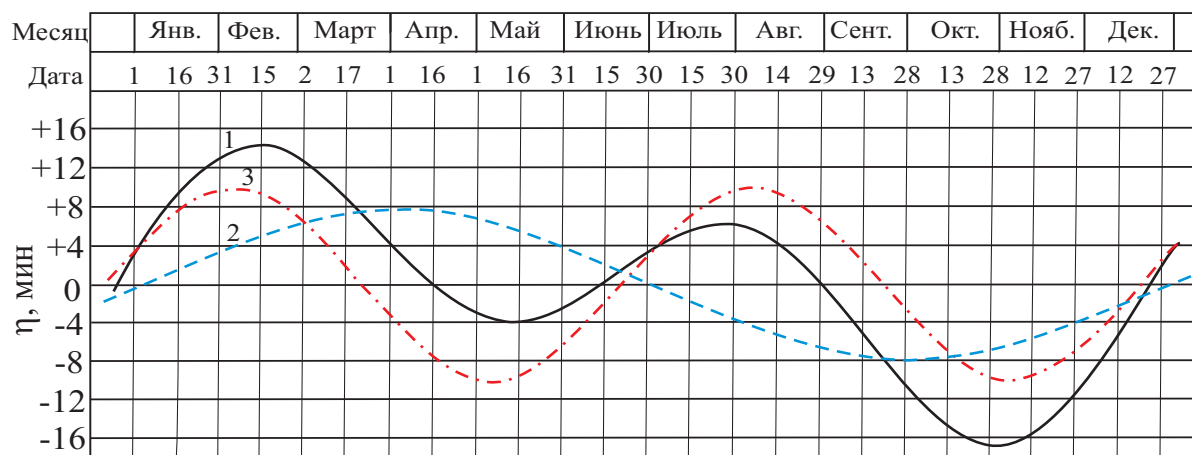


Рис. А.1. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.