

Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Муниципальный этап, теоретический тур
2023/2024 учебный год
11 класс

Решения задач и критерии их оценивания

№ 1. «Созвездия и яркие звезды (для 11-го класса)»

Условие. На рис. 1 представлен фрагмент звездной карты с указанием границ созвездий.

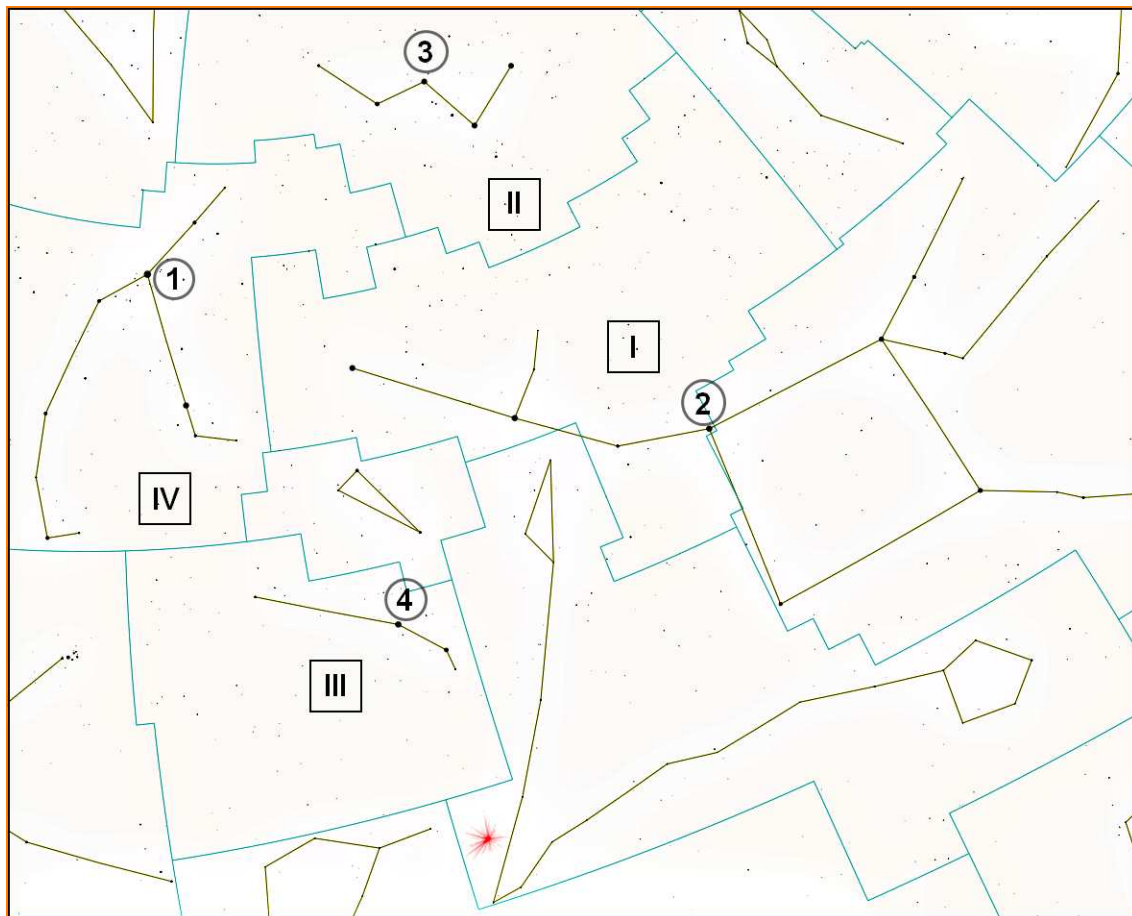


Рис. 1. К задаче №1.

1. Сопоставьте участкам звездного небосвода, отмеченным на рис. 1 римскими цифрами I–IV, названия созвездий, представленных в табл. 1. Свои ответы запишите в табл. 2. (1 балл за правильно названное созвездие)

А) Треугольник	Б) Малый Конь	В) Ящерица	Г) Овен
Д) Персей	Е) Рыбы	Ж) Водолей	З) Андромеда
И) Змея	К) Телец	Л) Кассиопея	М) Южная Рыба

Таблица 1. Названия некоторых созвездий земного небосвода.

Созвездие	I	II	III	IV
Название				

Таблица 2. К определению ответов на первый вопрос задачи.

2. Сопоставьте некоторым ярким звездам (обозначенным черными жирными точками), отмеченным на рис. 1 арабскими цифрами 1 – 4, их названия, представленные в табл. 3. Свои ответы запишите в табл. 4. (2 балла за правильно названную звезду)

А) Вега	В) Нави	С) Сириус	Д) Мирфак
Е) Мирах	Ф) Хамаль	Г) Шератан	Н) Мезартим
Ж) Альферац	К) Аламак	Л) Алголь	М) Маркаб

Таблица 3. Названия некоторых ярких звезд земного небосвода.

Звезда	1	2	3	4
Название				

Таблица 4. К определению ответов на второй вопрос задачи.

Решение. Идентификацию звезд и созвездий легче всего провести, опираясь на известные астеризмы, бросающиеся в глаза. Справа от центра кадра располагается самый известный астеризм осеннего небосвода, состоящий из 4 звезд и напоминающий почти идеальный квадрат – Большой Квадрат Пегаса. Слева от него и по центру кадра располагается цепочка ярких звезд, принадлежащих созвездию Андромеды. В левой верхней части кадра располагается известный астеризм «W» созвездия Кассиопеи.

В левой части кадра располагается громоздкий астеризм, напоминающий греческую букву «лямбда», зеркально отраженную относительно вертикальной линии. Это легко узнаваемый астеризм созвездия Персей.

Наконец, слева и внизу от центра кадра располагается небольшое созвездие, в центральной части которого располагается астеризм, состоящий всего лишь из четырех звезд, напоминающий «хоккейную клюшку». Этот астеризм принадлежит созвездию Овен.

Самой яркой звездой созвездия Персея является Мирфак (1), созвездия Андромеды – Альферац (2). Самой яркой звездой в созвездии Кассиопеи является Нави (3), а в созвездии Овна – Хамаль (4). Тот же фрагмент карты с правильным указанием названий искомых созвездий и звезд представлен на рис. 2.

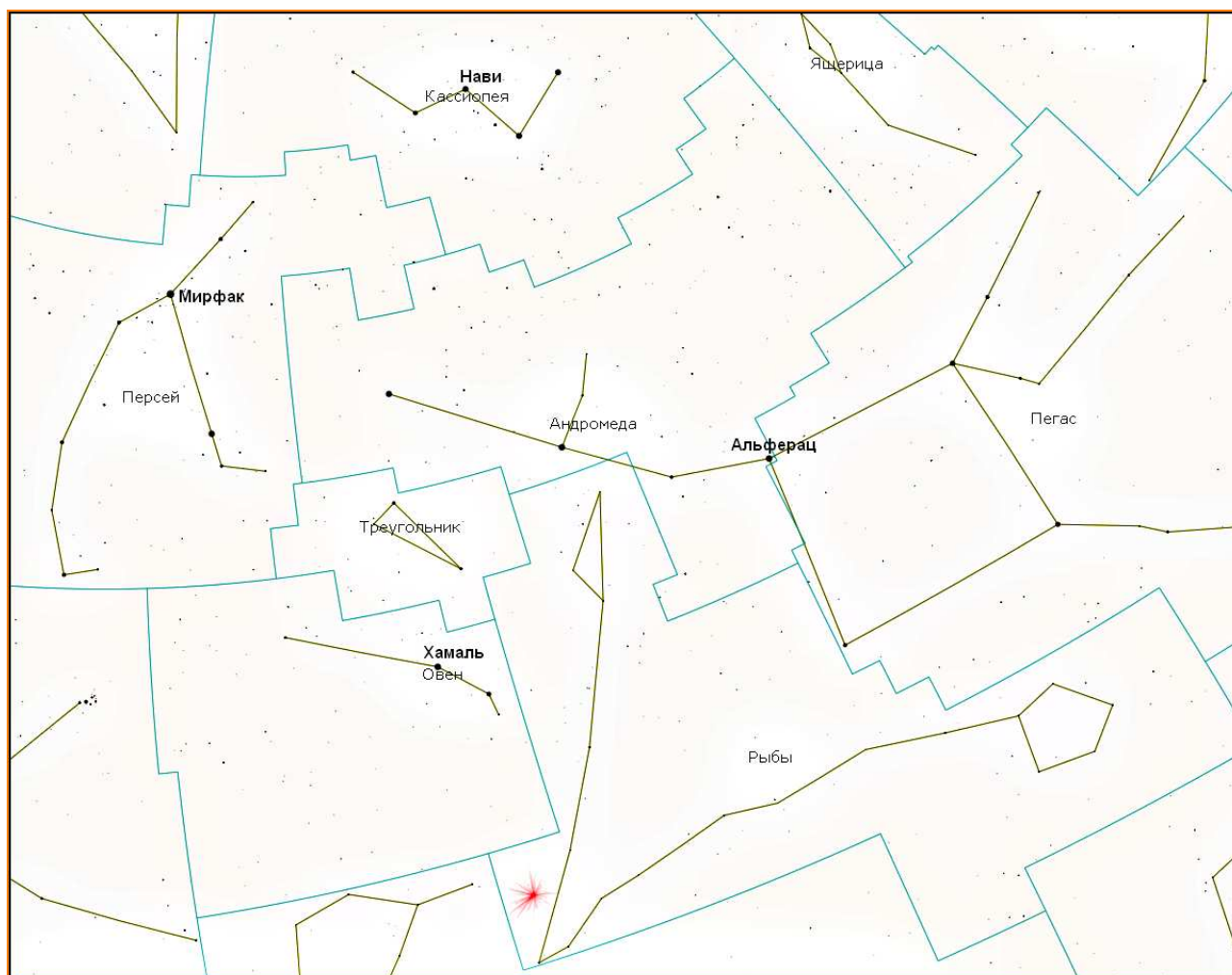


Рис. 2. К определению ответов на вопросы задачи №1.

Правильно заполненные таблицы задания представляются в виде:

Созвездие	I	II	III	IV
Название	З) Андромеда	Л) Кассиопея	Г) Овен	Д) Персей

Таблица 5. К определению правильных ответов на первый вопрос задачи.

Звезда	1	2	3	4
Название	Д) Мирфак	Л) Альферац	В) Нави	Ф) Хамаль

Таблица 6. К определению правильных ответов на второй вопрос задачи.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
За каждое правильно названное созвездие/звезду (допускается указание лишь заглавных букв – нумераторов позиций)	1/2(4/8)
Максимальный балл за задачу	12

№ 2. «Противосолнечная точка и ее положения (11 класс)»

Условие. Как известно, *противосолнечной точкой* называется точка небосвода, расположенная диаметрально противоположно по отношению к Солнцу, с точки зрения земного наблюдателя. С использованием диаграммы видимого положения Солнца относительно зодиакальных созвездий (см. рис. 3), определите:

1. С какой точкой небосвода должна совпасть противосолнечная точка в момент наступления осеннего равноденствия? (2 балла)

Варианты ответов:

1. Точка весеннего равноденствия	2. Точка летнего солнцестояния
3. Точка осеннего равноденствия	4. Точка зимнего солнцестояния

2. В каком созвездии Солнце описывает наименьшую дугу эклиптики, если считать его движение по эклиптике равномерным? Чему равна угловая мера этой дуги? Ответ представить в градусах, округлив до целых. (4 балла)

1. Овен	2. Телец	3. Близнецы	3. Рак
5. Лев	6. Дева	7. Весы	8. Скорпион
9. Змееносец	10. Стрелец	11. Козерог	12. Водолей
13. Рыбы	–	–	–

3. В каком созвездии противосолнечная точка пребывает в день рождения Виктора Амбарцумяна – 18 сентября? (2 балла)

1. Овен	2. Телец	3. Близнецы	3. Рак
5. Лев	6. Дева	7. Весы	8. Скорпион
9. Змееносец	10. Стрелец	11. Козерог	12. Водолей
13. Рыбы	–	–	–

4. Чему равно прямое восхождение противосолнечной точки 21 ноября? Ответ представить в часах, округлив до целого. (3 балла)

5. Вега – одна из ярчайших звезд ночного небосвода, экваториальные координаты которой есть $\alpha_* = 18^h 37^m$, $\delta_* = +38^\circ 47'$? В какое время года условия наблюдений этой звезды являются оптимальными? Свой ответ поясните. (6 баллов)

Пояснение: условия наблюдений небесного тела считаются *оптимальными*, если данное тело наблюдается в полночь (при этом Солнце опускается максимально глубоко под горизонт, т.е. находится в *нижней кульминации*) на наибольшей высоте над горизонтом (находится в своей *верхней кульминации*).

Варианты ответов:

1. Весна	2. Лето	3. Осень	4. Зима
----------	---------	----------	---------

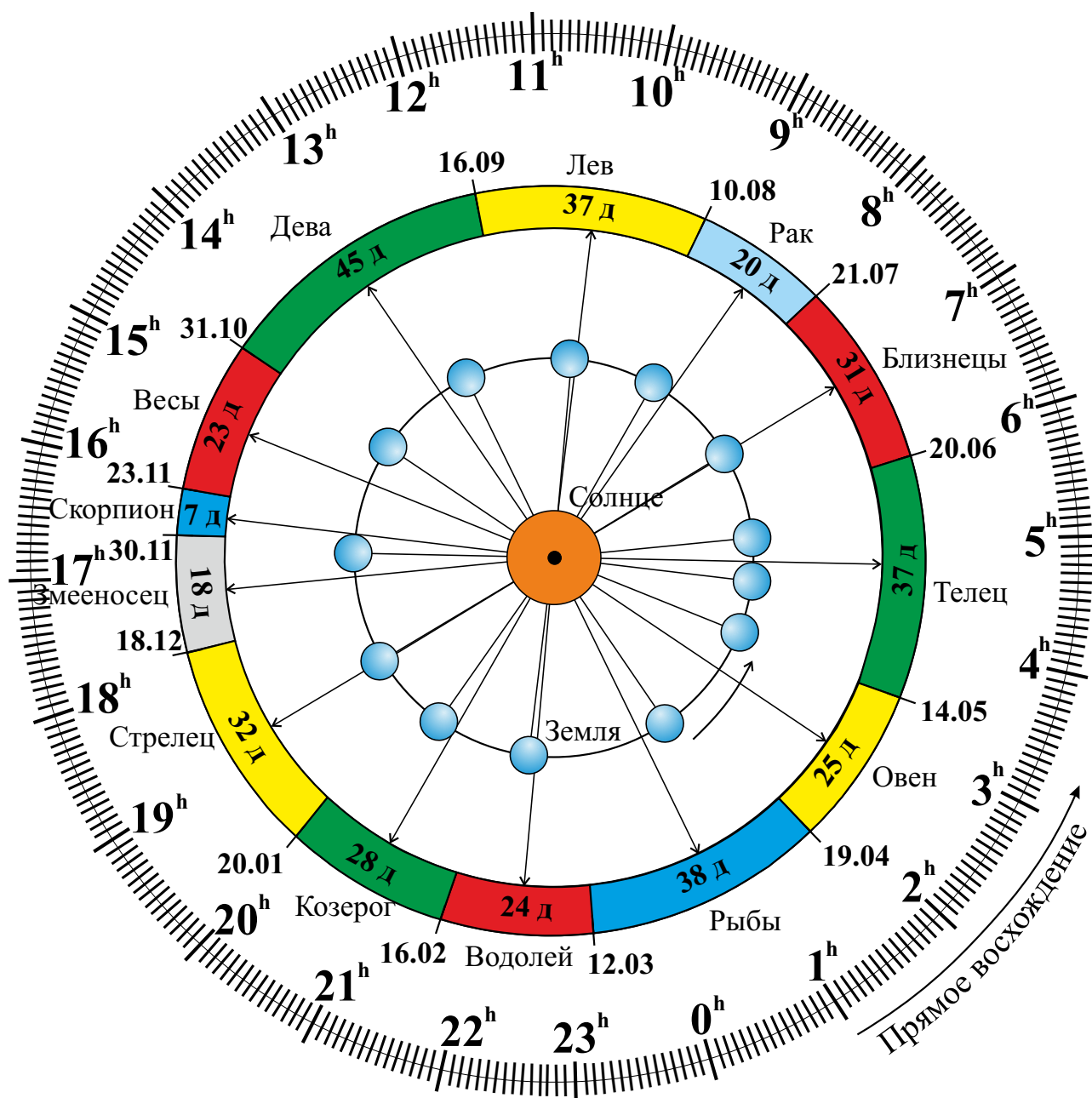


Рис. 3. Диаграмма видимого движения Солнца по зодиакальным созвездиям для наблюдателя, смотрящего с северного полюса эклиптики (здесь Земля движется против часовой стрелки, указано стрелкой; на рисунке видно ее северное полушарие); длинными прямыми стрелками указаны направления проецирования Солнца на зодиакальные созвездия с точки зрения земного наблюдателя; указанные даты отвечают начальному моменту пребывания Солнца в данном созвездии. Продолжительность пребывания в созвездии указана в сутках (днях); указана шкала прямых восхождений.

6. Через какое количество суток после момента наступления оптимальных условий наблюдений Арктур ($\alpha_* = 14^h 16^m$, $\delta_* = +19^\circ 11'$) наступит соответствующий момент для Веги? (3 балла)

Решение. 1. В момент наступления осеннего равноденствия Солнце находится в точке осеннего равноденствия, а значит противосолнечная точка должна совпасть с диаметрально противоположной точкой по отношению к указанной – с точкой весеннего равноденствия.

2. Если считать движение противосолнечной точки по эклиптике равномерным, то наименьшую дугу эклиптики оно описывает в том созвездии, в котором находится наименьшее количество суток, т.е. в созвездии *Скорпиона*. Согласно диаграмме рис. 3, противосолнечная точка также как и Солнце пребывает в данном созвездии 7 суток. Учитывая, что всю эклиптику противосолнеч-

ная точка (Солнце) проходит за 365.24 суток, то величина этой дуги эклиптики имеет значение: $360^\circ \times (7/365.24) \approx 7^\circ$.

3. В день рождения Виктора Амбарцумяна (18 сентября) Солнце находится в созвездии Девы, а противосолнечная точка должна располагаться в диаметрально противоположной точке небосвода, то есть в созвездии Рыбы.

4. Согласно той же диаграмме, 21 ноября прямое восхождение Солнца составляет приблизительно 16 часов, значит прямое восхождение противосолнечной точки должно быть меньше на 12 часов и соответственно составлять 4 часа.

5. Испытуемый может сразу назвать искомый сезон. Если он затрудняется это сделать сразу, то достаточно заметить, что если Солнце и данная звезда находятся в разных кульминациях одновременно, значит они располагаются в противоположных сторонах небосвода, следовательно их прямые восхождения должны отличаться на 12 часов. Значит, прямое восхождение Солнца в момент достижения оптимальных условий наблюдений звезды будет

$$\alpha_{\odot} = \alpha_* - 12^h = 6^h 37^m.$$

По диаграмме (см. рис. 3) определяем положение Солнца – оно должно находиться в созвездии Близнецы в начале июля, т.е. искомое время года – *лето*.

6. Оптимальные условия наблюдений Веги наступают в момент, когда прямое восхождение Солнца составляет $\alpha_{\odot}^{(1)} = 6^h 37^m$, а для Арктура – в момент, когда прямое восхождение Солнца принимает значение $\alpha_{\odot}^{(2)} = 14^h 16^m - 12^h = 2^h 16^m$. Следовательно за указанный промежуток времени изменение прямого восхождения Солнца должно составить $\Delta\alpha_{\odot} = \alpha_{\odot}^{(1)} - \alpha_{\odot}^{(2)} = 4^h 21^m$. Учитывая далее, что за 365.24 суток прямое восхождение Солнца изменяется на 24 часа, а движение Солнца по эклиптике является равномерным, то искомое количество суток можно вычислить так

$$N = \left[\frac{365.24 \text{ сут}}{24^h} 4^h 21^m \right] + 1 = 67 \text{ сут},$$

что соответствует концу апреля.

Ответ: 1) Точка весеннего равноденствия; 2) Скорпион, 7° ; 3) Рыбы; 4) 4^h ; 5) лето; 6) 67 сут.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Правильный ответ на вопрос №1,3	2(4)
Правильно названо созвездие + корректно вычислена угловая мера дуги в вопросе №2	2+2
Корректно определено прямое восхождение противосолнечной точки 21 ноября	3
Явно указано, что Вега и Солнце должны располагаться в противоположных сторонах небосвода + вычислено прямое восхождение Солнца + корректно определен сезон года	2+2+2(6)
Получено корректное значение для искомого промежутка времени в вопросе №6	3
Максимальный балл за задачу	20

№ 3. «Самодельный телескоп из очковых стекол-2»

Условие. Один смысленный самарский школьник решил построить самодельный телескоп из очковых стекол. Для этого он решил использовать в качестве объектива два мениска с оптической силой $D_1 = +0.25$ дптр, сложенных вплотную выпуклой стороной наружу. В качестве окуляра решил использовать небольшую линзу с оптической силой $D_2 = -10$ дптр. Чтобы минимизировать влияние хроматической аберрации на изображение, он вставил диафрагму диаметром 30 мм между менисками.

Определите:

1. Фокусные расстояния объектива и окуляра телескопа (в метрах). (3 балла)

2. Под каким углом этот школьник будет наблюдать Луну в полнолуние в свой телескоп? Орбиту Луны считать круговой. (2 балла)

3. Чему равно минимальное угловое расстояние (в угловых секундах) между компонентами (одинаковыми по яркости) двойной звезды, которые еще смогут быть разрешены в данный инструмент? (2 балла)

4. Во сколько раз освещенность самых тусклых звезд, еще видимых в данный телескоп меньше, чем освещенность самых тусклых звезд, еще видимых невооруженным глазом школьника? Диаметр зрачка школьника в ночное время составляет 6 мм. (2 балла)

5. Чему равна проникающая сила телескопа. Проникающую силу человеческого глаза принять равной $m_y = +6^m$. (2 балла)

6. Чему должна быть равна минимальная длина (в сантиметрах) телескопа во время наблюдения Луны? (3 балла)

Решение. 1. Фокусное расстояние окуляра можно вычислить непосредственно, опираясь на формулу его связи с оптической силой линзы:

$$f_{\text{ок}} = \frac{1}{|D_2|} = 0.10 \text{ м.} \quad (1)$$

Учитывая, что очковые мениски со столь малой оптической силой является, очевидно, тонкими линзами, сведенными вплотную, оптическую силу объектива можно определить так

$$D_{\text{об}} = D_1 + D_2 = 2D_1 = 0.5 \text{ дптр.}, \Rightarrow f_{\text{об}} = \frac{1}{D_{\text{об}}} = 2 \text{ м.} \quad (2)$$

2. Угловое увеличение телескопа (Γ) и угловой диаметр Луны ($D_{\text{л}}^{(T)''}$), наблюдаемой в телескоп, можно вычислить по формуле:

$$\Gamma = \frac{f_{\text{об}}}{f_{\text{ок}}} = 20\times, \text{ иначе } \Gamma = \frac{D_{\text{л}}^{(T)''}}{D_{\text{л}}^{(y)''}}, \Rightarrow D_{\text{л}}^{(T)''} = \Gamma \times D_{\text{л}}^{(y)''} = 622', \quad (3)$$

здесь учтено, что угловой диаметр Луны, видимой невооруженным глазом, составляет $D_{\text{л}}^{(y)''} = 2\Re_{\text{л}} \times 3438'/a_{\text{л}} = 31.1'$; $\Re_{\text{л}}$, $a_{\text{л}}$ – радиусы Луны и ее орбиты.

3. Как известно, под разрешающей (дифракционной) способностью объектива ($\beta_{\text{об}}$) понимается минимальное угловое расстояние (в угловых секундах) между компонентами (одинаковыми по яркости) двойной звезды, которые еще смогут быть разрешены в данный инструмент. Данный параметр определяется диаметром рабочей поверхности объектива телескопа. Поскольку объектив был задиафрагмирован, то диаметр диафрагмы и будет определять его разрешающую способность:

$$\beta_{\text{об}} = 1.22 \frac{\lambda}{D_d} \times 206265'' = 4.7'', \quad (4)$$

здесь в качестве рабочей длины световой волны использовано значение $\lambda = 555 \text{ нм}$.

4. Полагая, что оптический тракт телескопа не имеет световых потерь, можно полагать, что световой поток собираемый невооруженным глазом от самых тусклых еще видимых им звезд, равен световому потоку, собранному данным телескопом и направленному в глаз наблюдателя: $\Phi_{\text{tot}}^{(y)} = \Phi_{\text{tot}}^{(T)}$. С другой стороны, данные потоки можно представить в виде:

$$\Phi_{\text{tot}}^{(y)} = E_y \cdot S_y = E_y \cdot \pi D_y^2/4, \quad \Phi_{\text{tot}}^{(T)} = E_T \cdot S_T = E_T \cdot \pi D_d^2/4, \Rightarrow$$

$$\eta = \frac{E_y}{E_T} = \left(\frac{D_d}{D_y} \right)^2 = 25, \quad (5)$$

здесь E_y/E_T – освещенности, соответствующие самым тусклым звездам, еще видимым невооруженным глазом/в телескоп; $S_{\text{об}}/S_y$ – площади рабочих поверхностей объектива телескопа

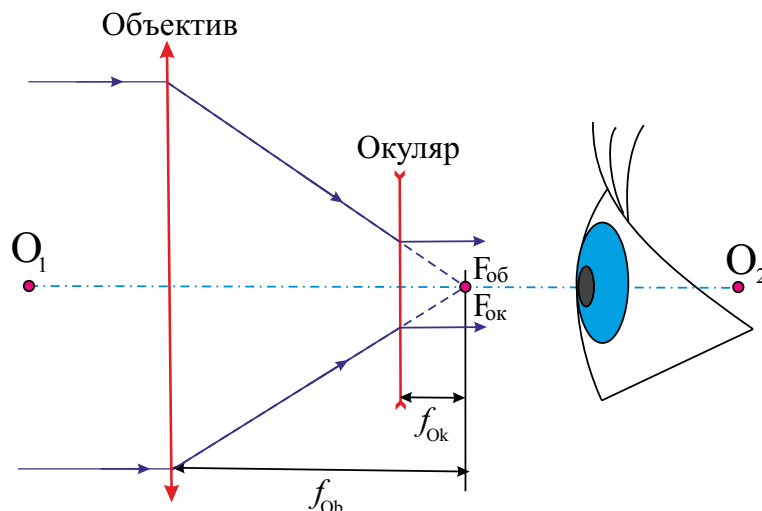


Рис. 4. К определению оптической схемы трубы Галилея.

и зрачка школьника; $\mathcal{D}_d/\mathcal{D}_y$ – диаметры рабочих поверхностей объектива телескопа (по сути, диафрагмы) и зрачка школьника (согласно условию задачи, $\mathcal{D}_y = 6$ мм).

5. Для определения проникающей силы телескопа воспользуемся формулой Погсона:

$$m_T - m_y = -2.5 \lg \left(\frac{E_T}{E_y} \right), \Rightarrow m_T - m_y = 5 \lg \left(\frac{\mathcal{D}_d}{\mathcal{D}_y} \right),$$

при записи последнего был использован результат (5). В итоге проникающая сила телескопа запишется так

$$m_T = m_y + 5 \lg \mathcal{D}_d - 5 \lg \mathcal{D}_y, \Rightarrow m_T = 2.1^m + 5^m \lg \mathcal{D}_d = 9.5^m. \quad (6)$$

6. По сути, школьник собрал телескоп-рефрактор по схеме Галилея, представленной на рис. 4. При фокусировке такого телескопа на бесконечность (на Луну), фокальные плоскости объектива и окуляра фактически совпадают. При этом расстояние между объективом и окуляром становится равным разности фокальных расстояний объектива и окуляра телескопа. Очевидно длина телескопа не может быть меньше этого расстояния. Следовательно, минимальная длина такого телескопа, сфокусированного на Луну, есть

$$L_{\min} = f_{\text{Об}} - f_{\text{Ок}} = 190 \text{ см}. \quad (7)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (2)-(7).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректная запись аналитической формулы для фокусного расстояния линзы через ее оптическую силу + правильный численный расчет фокусных расстояний объектива + окуляра	1+1+1
Правильно записана аналитическая формула для углового диаметра Луны в телескоп + выполнен его корректный численный расчет	1 + 1
Правильно записана аналитическая формула + выполнен корректный численный расчет для разрешающей способности телескопа	1 + 1
Правильно записана аналитическая формула для η + выполнен ее корректный численный расчет	1 + 1
Правильно записана аналитическая формула для проникающей силы телескопа + выполнен корректный численный расчет	1+1
Явное указание на схему трубы Галилея + особенность взаимного расположения фокальных плоскостей объектива и окуляра + расчет минимальной длины трубы телескопа	1+1+1
Максимальный балл за задачу	14



Рис. 5. К определению тора из водяного пара, порожденного Энцеладом вокруг Сатурна.

№ 4. «Громкое открытие космического телескопа им. Дж. Уэбба 2023 года»

Условие. Группа астрономов во главе с Дж. Виллануева из Центра космических полетов имени Годдарда представила весной 2023 года первые результаты наблюдений Энцелада с помощью космического телескопа им. Дж. Уэбба в ближнем инфракрасном диапазоне. Ученые обнаружили гигантский круглый тор (см. рис. 5), содержащий молекулы воды при температуре 25 К, любое поперечное сечение которого есть круг, радиус которого в 40 раз больше радиуса Энцелада ($R_E = 252$ км), а центр этого круга расположен на орбите спутника (радиус которой – $a_E = 237948$ км). Производство водяного пара с поверхности Энцелада составляет 300 кг/с, а в торе содержится около $N_{\text{mol}} = 2.5 \cdot 10^{34}$ молекул воды.

Определите:

1. Полный объем данного тора с использованием теоремы Гульдина-Паппа¹. (4 балла)
2. Среднюю концентрацию водяного пара в торе и среднее расстояние между двумя соседними молекулами воды в торе, полагая, что все молекулы воды распределены в теле тора равномерно. (5 баллов)
3. Полную массу воды в торе. Какое целое количество витков должен описать Энцелад вокруг Сатурна, чтобы масса произведенного им пара стала равна полной массе водяного пара в торе? $M_{H_2O} = 18$ г/моль – молярная масса воды. (8 баллов)
4. Длину волны, на которую приходится максимум интенсивности его электромагнитного излучения, предполагая, что тор излучает подобно абсолютно черному телу. (3 балла)

Решение. 1. Согласно условию задачи, водяной тор Энцелада представляет собой бублик (тор), радиус ($\bar{R}$) которого равен радиусу орбиты (a_E) Энцелада (см. рис. 6), относительно центра Сатурна, любое поперечное сечение которого есть круг, радиус (R_{cs}) которого в 40 раз больше радиуса Энцелада (R_E).

Для расчета объема кругового тора воспользуемся второй теоремой Гульдина-Паппа: *объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, расположенной в той же плоскости и не пересекающей фигуру, равен площади фигуры, умноженной на длину окружности, радиусом которой служит расстояние от оси вращения до геометрического центра фигуры:*

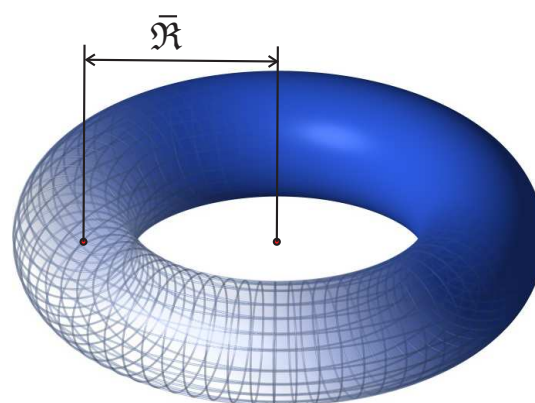


Рис. 6. К определению радиуса кругового тора.

$$V_{\text{tor}} = (2\pi \bar{R}) \times (\pi R_{cs}^2) = 3200 \pi^2 a_E \times R_E^2, \quad (8)$$

$$V_{\text{tor}} = 4.77 \cdot 10^{23} \text{ м}^3. \quad (9)$$

¹Вторая теорема Гульдина-Паппа гласит: *объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, расположенной в той же плоскости и не пересекающей фигуру, равен площади фигуры, умноженной на длину окружности, радиусом которой служит расстояние от оси вращения до геометрического центра фигуры.*

2. Согласно определению, средней концентрацией молекул водяного пара называется отношение количества молекул водяного пара, содержащихся в торе, к величине его объема:

$$n_{\text{mol}} = \frac{N_{\text{mol}}}{V_{\text{tor}}} = 5.24 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}. \quad (10)$$

Если молекулы воды в торе всюду расположены равномерно, то можно мысленно каждую молекулу заключить в центр куба, длина ребра которого будет определять расстояние между центрами двух соседних кубов, а значит и среднее расстояние между двумя соседними молекулами воды. Объем одного такого куба можно вычислить по формуле:

$$V_0 = \frac{V_{\text{tor}}}{N_{\text{mol}}} = \frac{1}{n_{\text{mol}}}, \text{ иначе } V_0 = a_0^3, \Rightarrow a_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{n_{\text{mol}}}} = 2.67 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \quad (11)$$

3. Полную массу водяного пара, содержащегося в торе, можно вычислить по формуле:

$$\mathfrak{M}_{\text{tot}} = m_0 N_{\text{mol}} = M_{H_2O} \frac{N_{\text{mol}}}{N_A} = 7.47 \cdot 10^8 \text{ кг}, \quad (12)$$

здесь m_0 – масса одной молекулы воды, $M_{H_2O} = 18$ г/моль – молярная масса воды, N_A – постоянная Авогадро.

Далее определим массу водяного пара, испускаемого с поверхности Энцелада за его один сидерический период. Для этого найдем его с использованием третьего закона Кеплера, сравнив орбитальные характеристики Энцелада и Титана:

$$\left(\frac{T_E}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{a_E}{a_T}\right)^3, \Rightarrow T_E = T_T \left(\frac{a_E}{a_T}\right)^{3/2} = 1.370 \text{ сут} = 118395 \text{ с}.$$

Значит масса водяного пара, теряемого Энцеладом за один сидерический период, составляет

$$\mathfrak{M}_{\text{los}} = Q_{H_2O} T_E = 3.55 \cdot 10^7 \text{ кг}. \quad (13)$$

Следовательно искомое количество витков, которые должен описать Энцелад вокруг Сатурна, составляет

$$N = \frac{\mathfrak{M}_{\text{tot}}}{\mathfrak{M}_{\text{los}}} = 21.0. \quad (14)$$

4. Длину волны, на которую приходится максимум интенсивности его электромагнитного излучения, предполагая, что тор излучает подобно абсолютно черному телу, можно определить с использованием закона Вина:

$$\lambda_m \cdot T_{H_2O} = b, \Rightarrow \lambda_m = \frac{b}{T_{H_2O}} = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \quad (15)$$

Ответ: к задаче представляется объединением диапазонов (8)-(15).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Получена аналитическая формула + выполнен правильный численный расчет объема данного тора с использованием теоремы Гульдина-Паппа	2+1
Получена аналитическая формула + выполнен правильный численный расчет для средней концентрации водяного пара в торе	1 + 1
Получена аналитическая формула + выполнен правильный численный расчет для среднего расстояния между двумя соседними молекулами воды	2 + 1
Получена аналитическая формула + выполнен правильный численный расчет для полной массы воды в торе	2 + 1
Использован третий закон Кеплера для определения T_E + определена масса, теряемая Энцеладом за один период, + получена аналитическая формула для количества витков, которые должен описать Энцелад вокруг Сатурна, + правильный численный расчет	2+2+2+1
Использован закон Вина + выполнен правильный численный расчет для длины волны, на которую приходится максимум интенсивности	1 + 1
Максимальный балл за задачу	20

№ 5. «Календарь Омара Хайяма и не только!»

Условие. В период XI-XIX вв. в Иране использовался солнечный календарь, разработанный Омаром Хайямом. В этом календаре обычный год состоял из 365 дней, а високосный – из 366, причем из каждых 33 лет 8 было високосных (3-й, 7-й, 11-й, 15-й, 20-й, 24-й, 28-й, 32-й). Сравните этот календарь с юлианским и григорианским. Какой из них более точный? Свой ответ обоснуйте строго математически. Определите количество лет, в течение которых в юлианском и григорианском календарях, а также в календаре Хайяма набегала погрешность в одни сутки. Продолжительность тропического года составляет 365.2421896698 суток. (14 баллов)

Решение. 1. Прежде всего вспомним, что *Юлианский календарь (ЮК)* – это календарь, разработанный группой александрийских астрономов во главе с Созигеном². Календарь назван в честь Юлия Цезаря, по указу которого был введен в Римской республике с 1 января 45 года до н.э. Основной единицей измерения времени в ЮК является *год*. Год по ЮК начинается 1 января, так как именно в этот день с 153 года до н.э. избранные комиссиями консулы вступали в должность.

Григорианский календарь (ГК) – календарь, разработанный германским математиком, астрономом, *Христофором Клавием* и итальянским астрономом, философом *Алоизием Лиццием* по указанию римского папы Григория XIII. Данный календарь был введен Григорием XIII в большинстве европейских государств, поддерживавших католическую церковь, 4 октября 1582 года взамен прежнего юлианского календаря (ЮК), из-за его большой погрешности, и как следствие неправильного датирования Пасхи и других церковных праздников, что подрывало веру людей в религиозные каноны католической церкви. По сути, ГК является модификацией солнечного ЮК с двумя важными дополнениями:

1. *Сдвиг дат*: при введении ГК, чтобы ликвидировать накопившуюся ошибку в ЮК, заключавшуюся в отставании даты ЮК от даты истинного хода времени был произведен сдвиг дат на 10 суток и вместо 5 октября 1582 года наступило сразу 15 октября.

2. *Введение второго цикла*: год, номер которого кратен 400, следует считать *високосным*, другие года, номера которых кратны 100, но не кратны 400, являются *невисокосными*. Т.о., 1600 и 2000 годы были високосными, а 1700, 1800 и 1900 годы високосными не были. Также не будет високосным и 2100 год. По сути, данная поправка эквивалентна введению второго цикла календаря продолжительностью $N_c^{(2)} = 400$ лет, в котором 303 обычных года и 97 високосных. Эта поправка была введена с целью уменьшить среднюю продолжительность календарного года, в сравнении с годом в ЮК, и таким образом уменьшить погрешность календаря.

В настоящее время ГК используется в большинстве стран мира. В литературе также применяется его альтернативное название – «новый стиль».

2. *Основные общие особенности ЮК и ГК.* В данных календарях *определены два вида года*: обычный и високосный. *Обычный год* состоит из 365 дней и делится на 12 месяцев. В свою очередь месяцы делятся на *длинные* (продолжительностью 31 сут) и *короткие* (продолжительностью 30 сут). Исключение составлял февраль, продолжительность которого в обычный год составляла 28 суток. В данных календарях насчитывалось 7 длинных месяцев: январь, март, май, июль, август, октябрь, декабрь и 5 коротких месяцев: февраль, апрель, июнь, сентябрь, ноябрь. Раз в 4 года объявляется високосный год, в который добавляется один день – 29 февраля. Т.о., ЮК и ГК содержал один общий *цикл* (минимальный промежуток времени, через который повторяются правила исчисления времени), продолжительностью $N_c^{(1)} = 4$ года. Первым днем года может быть любой из семи дней недели с понедельника по воскресенье.

3. Вычислим далее:

а) средние продолжительности одного юлианского/григоринского/хайямовского календарно-

² *Созиген* – греческий астроном, математик и философ, живший в I в. до н.э. в г. Александрия эллинистического Египта. В 46 году до н.э. был приглашен Юлием Цезарем в Рим для разработки Юлианского календаря.

го года:

$$\bar{T}_J = \frac{365 \cdot 3 + 366}{N_c} = 365.2500 \text{ сут}, \quad \bar{T}_G = \frac{365 \cdot 303 + 366 \cdot 97}{N_c^{(2)}} = 365.2425 \text{ сут}, \quad (16)$$

$$\bar{T}_{Kh} = \frac{365 \cdot 25 + 366 \cdot 8}{33} = 365.242424 \text{ сут}. \quad (17)$$

б) погрешность (в долях суток и в часах, минутах, секундах), набегаящую в этих календарях за один календарный год. Для этого учтем, что одним из требований, выдвигаемых к любому календарю, является следующее положение: *средняя продолжительность календарного года должна быть как можно ближе к продолжительности тропического года* ($T_{\text{try}} = 365.2421896698 \text{ сут}$); *каждый календарный год должен содержать целое количество суток*.

$$\Delta \bar{T}_J = |\bar{T}_J - T_{\text{try}}| = 0.0078103302 \text{ сут/год} = 11 \text{ мин } 15 \text{ сек в год}, \quad (18)$$

$$\Delta \bar{T}_G = |\bar{T}_G - T_{\text{try}}| = 0.0003103302 \text{ сут/год} = 26.8 \text{ сек/год}, \quad (19)$$

$$\Delta \bar{T}_{Kh} = |\bar{T}_{Kh} - T_{\text{try}}| = 0.000234573 \text{ сут/год} = 20.3 \text{ сек/год}. \quad (20)$$

Из сопоставления погрешностей календарей приходим к заключению, что наиболее точным календарем из данной тройки является календарь Омара Хайяма.

в) количество лет, за которые набегает погрешность в одни сутки в данных календарях:

$$\chi_J = \frac{1}{\Delta \bar{T}_J} = 128 \text{ лет/сут}, \quad \chi_G = \frac{1}{\Delta \bar{T}_G} = 3222 \text{ года/сут}, \quad \chi_{Kh} = \frac{1}{\Delta \bar{T}_{Kh}} = 4262 \text{ года/сут}. \quad (21)$$

Сравнение трех последних значений приводит нас к тому же выводу.

Ответ: к задаче представляется выражениями (16)-(21).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Представлена краткая справка по устройству юлианского+григорианского календарей, на основе которой уже возможно выполнение расчетов	1 + 1
Выполнен корректный расчет средней продолжительности календарного года в случае юлианского+григорианского+хайямовского календарей	1 + 1 + 1
Выполнен корректный расчет погрешности, набегаящей за 1 год в случае юлианского+григорианского+хайяновского календарей. + Правильно сделан вывод о наибольшей точности хайямовского календаря	1+1+1+3
Вычислены количества лет, за которые набегает погрешность в одни сутки в юлианском + григорианском + хайямовском календарях	1 + 1 + 1
Максимальный балл за задачу	14

№ 6. «Что быстрее удаляется от Солнца?»

Условие. 1. Как известно, расстояние между Солнцем и Землей необратимо увеличивается из-за массовых потерь центрального светила. Определите скорость (в см/год) увеличения радиуса *круговой* орбиты Земли в настоящий момент. В расчетах необходимо учесть следующие виды массовых потерь: 1) потери, обусловленные электромагнитным излучением, 2) потери, обусловленные солнечным ветром (основные характеристики солнечного ветра см. в таб. 7). (15 баллов)

Параметр	Среднее	Параметр	Среднее
$\bar{v}$, (км/с)	400	η_p	0.96
$n_p, \times 10^6 \text{ (1/м}^3\text{)}$	6.0	η_α	0.04

Примечание: здесь n_p – средняя концентрация протонов, $\bar{v}$ – средняя скорость солнечного ветра на орбите Земли, $\eta_{\{p,\alpha\}}$ – мольные доли протонов и альфа-частиц (основных носителей массы).

Таблица 7. Основные количественные характеристики солнечного ветра.

2. В результате эволюции светимость Солнца на масштабах 10^9 лет изменяется по закону:

$$L_\odot(t) = L_\odot^{(0)} \left[1 + \frac{2}{5} \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) \right]^{-1}, \quad (22)$$

где t – время жизни Солнца на интересующий момент времени, $t_0 = 4.57 \cdot 10^9$ лет – время жизни Солнца на данный момент, $L_\odot(t)$ – светимость Солнца в момент времени t , $L_\odot^{(0)}$ – светимость Солнца на данный момент. Определите скорость удаления от Солнца сферы (в настоящий момент), на поверхности которой солнечная постоянная неизменна и равна $f_\odot = 1361$ Вт/м². (4 балла)

3. Что удаляется от Солнца быстрее: орбита Земли или сфера постоянства солнечной постоянной? (1 балл)

Решение. 1. Рассмотрим движение Земли по круговой орбите. Запишем для нее второй закон Ньютона

$$\frac{m_\oplus V_\oplus^2}{a_\oplus} = \frac{G m_\oplus m_\odot}{a_\oplus^2}, \Rightarrow V_\oplus^2 = \frac{G m_\odot}{a_\oplus}. \quad (23)$$

Далее учтем, что согласно второму закону Кеплера, за равные промежутки времени гелиоцентрический радиус-вектор Земли описывает равные площади, т.е., согласно рис. 7, имеем

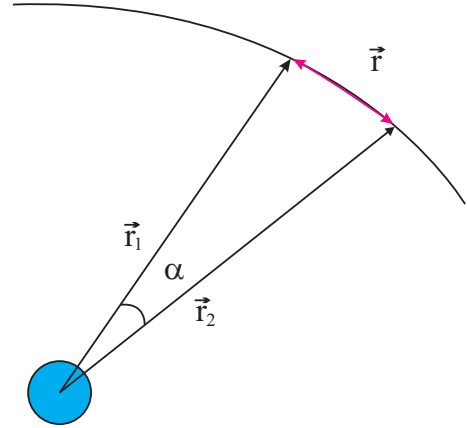


Рис. 7. К определению искомой величины.

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = C_0 \text{ или } \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} r_1 \cdot r_2 \sin \Delta \alpha}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \cdot V = C_0, \quad (24)$$

здесь учтено, что $r_1 = r_2 = r$, $\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \omega$, $V = \omega \cdot r$ – гелиоцентрическая скорость Земли; C_0 – некоторая компонента. Из (24) следует, что

$$V = \frac{2 C_0}{r}. \quad (25)$$

Подставим (25) в (23), получаем

$$\frac{4 C_0^2}{a_\oplus^2} = \frac{G m_\odot}{a_\oplus}, \Rightarrow a_\oplus = \frac{4 C_0^2}{G m_\odot}. \quad (26)$$

Запишем выражение (26) для двух близких моментов времени:

$$t : a_\oplus = \frac{4 C_0^2}{G m_\odot}; \quad t + \Delta t : a_\oplus + \Delta a_\oplus = \frac{4 C_0^2}{G(m_\odot - \Delta m_\odot)}.$$

Вычтем из второго уравнения первое и разделим на Δt , тогда получим

$$\Delta a_\oplus = \frac{4 C_0^2}{G} \frac{\Delta m_\odot}{(m_\odot - \Delta m_\odot) m_\odot} \approx \frac{4 C_0^2}{G m_\odot^2} \Delta m_\odot, \text{ или } \frac{\Delta a_\oplus}{\Delta t} = \left(\frac{a_\oplus}{m_\odot} \right) \frac{\Delta m_\odot}{\Delta t}. \quad (27)$$

Т.о., скорость изменения радиуса (большой полуоси) земной орбиты прямо пропорциональна скорости изменения массы Солнца.

2. Далее найдем закон изменения массы Солнца за счет указанных в условии эффектов. Очевидно, что за время Δt изменение массы Солнца есть

$$\Delta m_\odot = \Delta m_\odot^{(EM)} + \Delta m_\odot^{(SW)}, \quad (28)$$

здесь $\Delta m_\odot^{(EM)}$ – массовые потери Солнца, обусловленные его электромагнитным излучением, $\Delta m_\odot^{(SW)}$ – массовые потери Солнца, обусловленные истечением солнечного ветра (его корпускулярным излучением). Для определения первого слагаемого воспользуемся формулой Эйнштейна:

$$\Delta E^{(EM)} = \Delta m_\odot^{(EM)} \cdot c^2.$$

Разделим ее на промежуток времени Δt и учтем что $L_\odot = \Delta E^{(EM)} / \Delta t$ – светимость Солнца.

$$L_\odot = \frac{\Delta m_\odot^{(EM)}}{\Delta t} \cdot c^2, \Rightarrow \frac{\Delta m_\odot^{(EM)}}{\Delta t} = \frac{L_\odot}{c^2} = 4.252 \cdot 10^9 \text{ кг/с}. \quad (29)$$

3. Вычислим потери $\Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(SW)}$:

$$\Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(SW)} = m_p \Delta N_p + m_{\alpha} \Delta N_{\alpha}, \quad (30)$$

здесь m_p, m_{α} – массы протона и α - частицы; $\Delta N_p, \Delta N_{\alpha}$ – количества протонов и α – частиц, покинувших Солнце за время Δt . Поскольку поток солнечного ветра стационарный, то далее будем рассматривать его на орбите Земли. За время Δt через сферу радиуса $a_{\oplus}$ (и площадью $S = 4\pi a_{\oplus}^2$) проходит количества ΔN_p протонов, и ΔN_{α} – альфа-частиц, который можно записать так

$$\Delta N_p = n_p \cdot \Delta V = n_p \cdot S \cdot \bar{v} \cdot \Delta t, \quad \Delta N_{\alpha} = n_{\alpha} \cdot S \cdot \bar{v} \cdot \Delta t. \quad (31)$$

Учтем далее, что

$$\eta_p = \frac{\nu_p}{\nu_p + \nu_{\alpha}} = \frac{\Delta N_p}{\Delta N_p + \Delta N_{\alpha}} = \frac{n_p}{n_p + n_{\alpha}}, \quad \eta_{\alpha} = \frac{n_{\alpha}}{n_p + n_{\alpha}}, \quad (32)$$

здесь ν_p, ν_{α} – мольные количества протонов и α – частиц; n_p, n_{α} – их объемные концентрации. Из (32) следует, что

$$\frac{\eta_p}{\eta_{\alpha}} = \frac{n_p}{n_{\alpha}}, \Rightarrow n_{\alpha} = \frac{\eta_{\alpha}}{\eta_p} \cdot n_p, \quad (33)$$

тогда (30) можно переписать так

$$\frac{\Delta \mathfrak{M}_{\odot}^{(SW)}}{\Delta t} = m_p n_p S \bar{v} + m_{\alpha} \frac{\eta_{\alpha}}{\eta_p} n_p S \bar{v} = 4\pi a_{\oplus}^2 \bar{v} \left(m_p + \frac{\eta_{\alpha}}{\eta_p} m_{\alpha} \right) n_p = 1.315 \cdot 10^9 \text{ кг/с}. \quad (34)$$

Следовательно, полный поток массовых потерь Солнца есть

$$\frac{\Delta \mathfrak{M}_{\odot}}{\Delta t} = 5.567 \cdot 10^9 \text{ кг/с}. \quad (35)$$

Тогда скорость изменения радиуса земной орбиты есть

$$V_a = \frac{\Delta a_{\oplus}}{\Delta t} = \frac{a_{\oplus}}{\mathfrak{M}_{\odot}} \left(\frac{\Delta \mathfrak{M}_{\odot}}{\Delta t} \right) = 4.19 \cdot 10^{-10} \text{ м/с} = 1.32 \text{ см/год}. \quad (36)$$

4. Согласно определению, *солнечной постоянной* называется скалярная физическая величина, равная отношению полного потока электромагнитного излучения испущенного всей поверхностью Солнца во всех направлениях к величине площади сферы, радиус которой равен радиусу орбиты Земли, т. е.

$$f_{\odot} = \frac{L_{\odot}^{(0)}}{4\pi a_{\oplus}^2} = 1361 \text{ Вт/м}^2. \quad (37)$$

Приравняв солнечные постоянные, определенные в настоящий момент и в момент, отличающийся от настоящего на малую величину Δt , с использованием выражений (37) и (22). В итоге получаем

$$\begin{aligned} \frac{L_{\odot}^{(0)}}{4\pi a_{\oplus}^2} &= \frac{L_{\odot}^{(0)}}{4\pi (a_{\oplus} + \Delta a_{\oplus})^2} \left[1 + \frac{2}{5} \left(1 - \frac{t_0 + \Delta t}{t_0} \right) \right]^{-1}, \Rightarrow \left(\frac{a_{\oplus} + \Delta a_{\oplus}}{a_{\oplus}} \right)^2 = \left[1 - \frac{2}{5} \frac{\Delta t}{t_0} \right]^{-1}, \Rightarrow \\ \left(1 + \frac{\Delta a_{\oplus}}{a_{\oplus}} \right)^2 &= \left[1 - \frac{2}{5} \frac{\Delta t}{t_0} \right]^{-1}, \Rightarrow 1 + 2 \frac{\Delta a_{\oplus}}{a_{\oplus}} \approx 1 + \frac{2}{5} \frac{\Delta t}{t_0}, \Rightarrow \frac{\Delta a_{\oplus}}{\Delta t} = \frac{1}{5} \frac{a_{\oplus}}{t_0} = 655 \text{ см/год}. \end{aligned} \quad (38)$$

5. Из сопоставления результатов (36) и (38) приходим к заключению, что сфера солнечной постоянной удаляется от Солнца гораздо быстрее нежели орбита Земли. Именно благодаря данному факту, в далеком будущем, Земля выйдет из зоны обитаемости Солнечной системы и жизнь на Земле станет невозможной.

Ответ: к задаче представлен выражениями (36), (38); сфера постоянства солнечной постоянной удаляется от Солнца гораздо быстрее нежели орбита Земли.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
С использованием второго закона Ньютона получено выражение для орбитальной скорости Земли + с использованием второго закона Кеплера получена связь этой же скорости с гелиоцентрическим расстоянием + установлена прямо пропорциональная зависимость между скоростью изменения радиуса орбиты Земли и скоростью изменения массы Солнца	2+2+2
Выполнен расчет скорости массовых потерь Солнца обусловленных его электромагнитным излучением + корпускулярным излучением	2+4
Получена аналитическая формула + выполнен правильный численный расчет для скорости изменения радиуса орбиты Земли	2+1
Получена аналитическая формула для скорости удаления от Солнца сферы постоянства солнечной постоянной + выполнен ее корректный численный расчет + сделан правильный вывод о превосходстве скорости удаления сферы	3+1+1
Максимальный балл за задачу	20

На решение задач данного тура Олимпиады школьникам отводится 4 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса α – частицы – $m_\alpha = 6.645 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 3.261 \text{ св. лет} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли – 1360 Вт/м^2
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – 23 часа 56 минут 04 секунды
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус – 6378.14 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Средний (по объему) радиус – 6371.01 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

§4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$

- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

Дополнительные справочные данные

§9. Освещенность, создаваемая звездой с видимой звездной величиной $m = 0^{\text{m}}$

$$E_0 = 2.48 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2.$$