

Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Муниципальный этап, теоретический тур
2024/2025 учебный год
10 класс

Решения задач и критерии их оценивания

№ 1. «Большая "семья" Солнечной системы (22 балла)»

Условие. На рис. 1 дана упрощенная схема Солнечной системы (не в масштабе) с указанием нумерации ее основных тел.

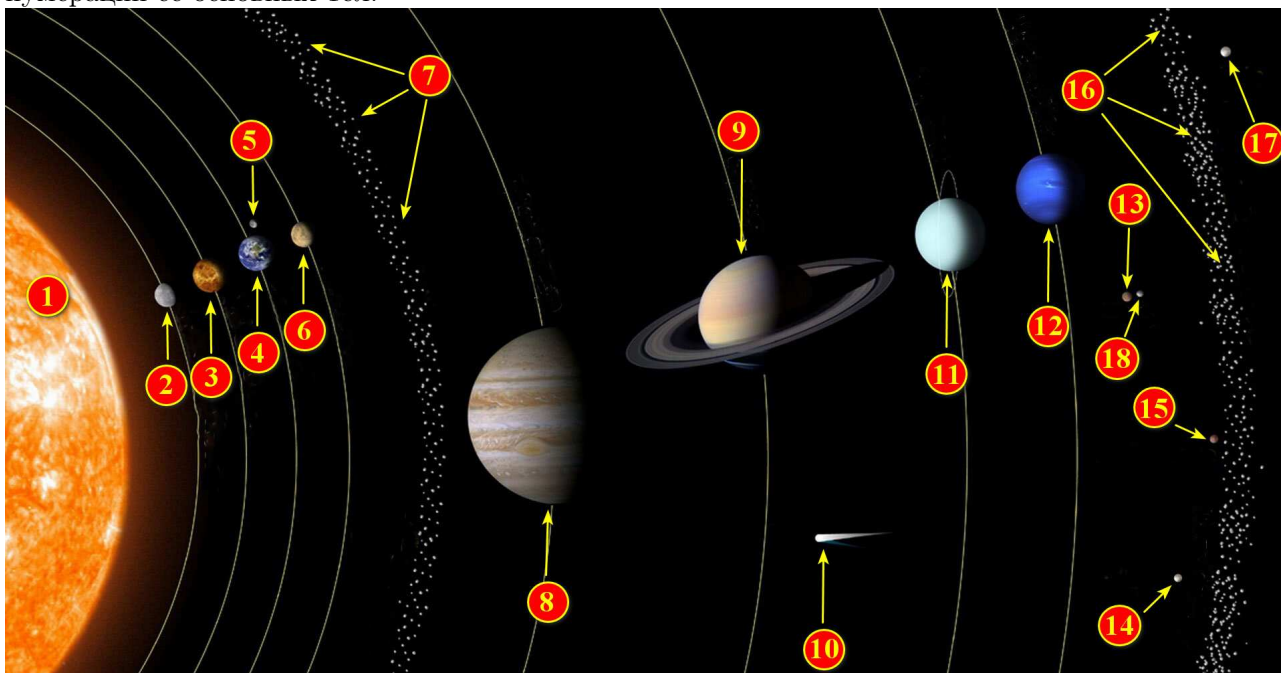


Рис. 1. Основные тела, составляющие Солнечную систему.

1. Установите соответствие между названиями представленных тел или системы тел и номерами, соответствующими им на рисунке. Ответ представьте в виде пар (буква, цифра). (1 балл за правильно указанную пару)

Варианты ответов:

А. Комета	Б. Макемаке (карликовая планета)	В. Нептун	Г. Меркурий
Д. Эрида (карликовая планета)	Е. Луна	Ж. Харон (спутник Плутона)	З. Главный пояс астероидов

Примечание: при решении задачи Вам может оказаться полезным неравенство для средних гелиоцентрических расстояний a_i до планет-карликов:

$$a_{\text{Церера}} < a_{\text{Плутон} + \text{Харон}} < a_{\text{Хаумеа}} < a_{\text{Макемаке}} < a_{\text{Эрида}}.$$

2. У какой классической планеты самая высокая средняя массовая плотность? Здесь и далее ответ на вопрос представьте номером, соответствующим данной планете на рис. 1. (2 балла)

3. В какой области Солнечной системы располагается карликовая планета (сама планета не указана на рисунке), которая была открыта в 1801 году как "пропавшая планета", существование которой было предсказано эмпирическим законом Тициуса-Боде? (2 балла)

4. Какая классическая планета Солнечной системы обладает самой высокой угловой скоростью осевого вращения? (2 балла)

5. Если бы все классические планеты были бы твердыми телами, то при погружении их в гигантский океан из жидкой воды (плотность которой равна 1000 кг/м^3), какая(ие) бы из них осталась(ись) на плаву? (2 балла за каждую планету)

6. На круговых орбитах каких планет их скорость относительно Солнца больше 32 км/с? (3 балла за каждую планету)

Решение.

1. Как известно, *комета* – это малое тело Солнечной системы, движущееся по сильно вытянутой орбите, и при движении с ее окраин к Солнцу, приобретающее газопылевую кому и хвост. Этому объекту соответствует образ [10].

Макемаке – это карликовая планета, расположенная на окраинах Солнечной системы. С учетом предложенных неравенств нетрудно понять, что на рис. 1 эта планета расположена вблизи внутренней границы пояса Койпера и ей соответствует номер [15].

Нептун – это самая далекая от Солнца классическая планета Солнечной системы. Путем прямого пересчета орбит классических планет легко убедиться в том, что ему соответствует образ под номером [12].

Меркурий – это ближайшая классическая планета к Солнцу. Очевидно, на рис. 1 ему соответствует номер [2].

Эрида – это самая далекая от Солнца карликовая планета. С учетом предложенных неравенств нетрудно понять, что на рис. 1 эта планета расположена вблизи внешней границы пояса Койпера и ей соответствует номер [17].

Луна – это единственный естественный спутник Земли. Очевидно, данному телу на рис. 1 соответствует номер [5].

Харон – это небесное тело, которое вместе с Плутоном образует двойную планету в Солнечной системе. Традиционно его называют крупнейшим спутником Плутона, хотя правильно его следует называть компаньоном. Из предложенных неравенств следует, что Плутон вместе Хароном являются ближайшими телами к Солнцу, среди далеких карликовых планет (расположенных в окрестности пояса Койпера). Значит ему на рисунке соответствует номер [18].

Главный пояс астероидов – это область пространства, заключенная между орбитами Марса и Юпитера и заполненная более чем 6 миллионами астероидов. Данной области пространства, очевидно, соответствует номер [7].

В итоге имеем следующие пары тел:

(А, 10)	(Б, 15)	(В, 12)	(Г, 2)
(Д, 17)	(Е, 5)	(Ж, 18)	(З, 7)

2. С использованием справочных данных (колонка 6 таблицы из параграфа 5) легко убедиться в том, что самая высокая средняя массовая плотность имеется у Земли [4].

3. Церера – это первая карликовая планета, обнаруженная в 1801 году как "пропавшая планета", существование которой было предсказано эмпирическим законом Тициуса-Боде и орбита которой должна была располагаться между орбитами Марса и Юпитера. В настоящее время считается, что ее орбита расположена внутри Главного пояса астероидов [7].

4. Самой высокой угловой скоростью осевого вращения и, следовательно, самым малым периодом этого движения обладает Юпитер [8]. В этом легко убедиться с использованием справочных данных (колонка 7 таблицы из параграфа 5).

5. Чтобы планета оставалась на плаву в гигантском океане из жидкой воды необходимо, чтобы ее средняя массовая плотность была меньше плотности воды. С использованием справочных данных (колонка 6 таблицы из параграфа 5) легко убедиться в том, что лишь Сатурн [9] удовлетворяет данному условию.

6. Если на круговой орбите скорость (первая космическая – V_I) планеты относительно Солнца больше 32 км/с, значит должно выполняться следующее неравенство:

$$V_I = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_{\odot}}{a_p}} = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_{\odot}}{a_{\oplus}}} \sqrt{\frac{a_{\oplus}}{a_p}} > 32 \text{ км/с}, \Rightarrow \frac{a_{\oplus}}{a_p} > \left(\frac{32 \text{ км/с}}{V_I^{\oplus}} \right)^2, \Rightarrow a_p < 0.88 \text{ а. е.}$$

С использованием справочных данных (колонка 3 таблицы из параграфа 6) можно легко убедиться в том, что последнему условию удовлетворяют лишь Меркурий [2] и Венера [3]. При записи последнего выражения был учтено, что $a_{\oplus} = 1 \text{ а. е.}$ – радиус круговой орбиты Земли, $V_I^{\oplus} = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_{\odot}}{a_{\oplus}}} = 30 \text{ км/с}$ – скорость (первая космическая) Земли на своей круговой орбите.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
За каждую правильно определенную пару в пункте 1	1(8)
За каждый правильно определенный объект в пунктах 2-5	2(8)
За каждую правильно определенную планету в пункте 6	3(6)
Максимальный балл за задачу	22

№ 2. «Объекты и явления космоса (16 баллов)»

Дан список известных объектов и явлений космоса.

Небесные тела			
1. Международная космическая станция	2. Большая туманность Ориона	3. Марс	4. Геостационарный спутник «Радуга»
Небесные явления			
5. Столкновение галактик	6. Полярное сияние	7. Болид	8. Взрыв кометы Холмса

1. Установите соответствие между объектами/явлениями и областями космического пространства, в которых они находятся/происходят. Ответ представьте в виде пар (буква, цифра). (1 балл за правильно указанную пару)

Варианты ответов:

А) Атмосфера Земли (от поверхности Земли и до высоты 180 км)	Б) Околоземное внеатмосферное пространство (выше 180 км над поверхностью Земли и не больше 1.5 млн от центра последней)	В) Ближний космос (Солнечная система)	Г) Дальний космос (вне Солнечной системы)

2. Какое из перечисленных небесных тел имеет самые большие линейные размеры? (2 балла)

Варианты ответов:

Международная космическая станция	Большая туманность Ориона	Марс	Геостационарный спутник «Радуга»
-----------------------------------	---------------------------	------	----------------------------------

3. Какое небесное тело, в результате собственного движения, все время остается над одной и той же точкой поверхности Земли? (2 балла)

Варианты ответов:

Международная космическая станция	Большая туманность Ориона	Марс	Геостационарный спутник «Радуга»
-----------------------------------	---------------------------	------	----------------------------------

4. Какое небесное явление ожидает наш Млечный путь через 4.5 млрд лет? (2 балла)

Варианты ответов:

Столкновение галактик	Полярное сияние	Болид	Взрыв кометы Холмса
-----------------------	-----------------	-------	---------------------

5. Какие явления могут наблюдаться и в атмосфере Земли, и в атмосферах других планет? (1 балл за явление)

Варианты ответов:

Столкновение галактик	Полярное сияние	Болид	Взрыв кометы Холмса
-----------------------	-----------------	-------	---------------------

Решение. 1.1. *Международная космическая станция* – это пилотируемый искусственный спутник Земли, движущийся вокруг последней на высоте 420 км. Следовательно данное тело расположено в околоземном внеатмосферном пространстве (область Б).

2. *Большая туманность Ориона* – это комплекс эмиссионных, отражательных туманностей и области звездообразования в созвездии Ориона, расположенный от Солнца на расстоянии 1500 световых лет. Последнее значение существенно больших размеров Солнечной системы, значит данный комплекс является объектом дальнего космоса (область Г).

3. *Марс* – это классическая планета Солнечной системы (область В). Является 4-ой по удаленности от Солнца.

4. *Геостационарный спутник Радуга* – это искусственный спутник Земли, движущийся по геостационарной орбите, высота которой составляет около 36 тысяч километров (область Б).

5. *Столкновение галактик* – это астрономическое явление с участием двух или более галактик, вступающих в контактное взаимодействие в результате взаимного гравитационного притяжения. Данное явление происходит исключительно в области Г.

6. *Полярное сияние* – это атмосферное оптическое явление, проявляющееся как свечение (люминесценция) верхних слоев атмосферы Земли (и других планет), обусловленное взаимодействием магнитосферы и атмосферы планеты с заряженными частицами солнечного ветра. В случае Земли это явление происходит в области А.

7. *Болид* – это атмосферное оптическое явление, проявляющееся как яркая вспышка в небе продолжительностью до нескольких десятков секунд, интегральный блеск которой меньше блеска Венеры (-4.5^m) в наибольшей элонгации. Оно возникает при вхождении в атмосферу Земли или других планет метеороидов, небольших астероидов и комет или космического мусора искусственного происхождения. В случае Земли это явление происходит в области А.

8. *Взрыв кометы Холмса* – это нерегулярное астрономическое явление, произошедшее в октябре 2007 года в пределах Солнечной системы (область В), которое выглядело как внезапная вспышка ядра кометы, в результате которой последняя увеличила свою яркость в 400 тысяч раз, с $+17^m$ до $+2.5^m$ звездной величины. Эта вспышка стала самой сильной за всю историю кометных наблюдений. Предположительно, причиной такой вспышки стал взрыв ядра кометы, в результате его столкновения с неизвестным телом и последующим выбросом кометного вещества в окружающее пространство.

В итоге имеем следующее распределение по областям:

А) Атмосфера Земли (от поверхности Земли и до высоты 180 км)	Б) Околоземное внеатмосферное пространство (выше 180 км над поверхностью Земли и не больше 1.5 млн от центра последней)	В) Ближний космос (Солнечная система)	Г) Дальний космос (вне Солнечной системы)
6, 7	1, 4	3, 8	2, 5

2. Среди представленных небесных тел *Большая туманность Ориона (БТО)* обладает наибольшими угловыми размерами, при этом располагается в *области далекого космоса*, т. е. является самым удаленным объектом относительно Земли. Следовательно, наибольшими линейными размерами обладает именно БТО.

3. Период обращения любого геостационарного спутника (в том числе и спутника «Радуга») относительно центра Земли равен периоду вращения последней вокруг своей оси. Данное условие обеспечивает «зависание» такого спутника над одной и той же точкой поверхности Земли.

4. Согласно точным астрономическим расчетам, через 4.5 млрд лет произойдет *столкновение двух галактик*: Млечного пути и туманности Андромеды.

5. Как было отмечено в пункте 1, в атмосферах Земли и других планет можно наблюдать такие явления как полярное сияние и болид.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
За каждую правильно определенную позицию объекта или явления в пункте 1	1(8)
За каждый правильно определенный объект/явление в пунктах 2-4	2(6)
За каждую правильно определенное явление в пункте 5	1(2)
Максимальный балл за задачу	16

№ 3. «Координаты светил и широта местности (14 баллов)»

Условие. На рис. 2 представлена небесная сфера для жителя северного географического полушария, расположенного на широте φ ($\varphi > 0$).

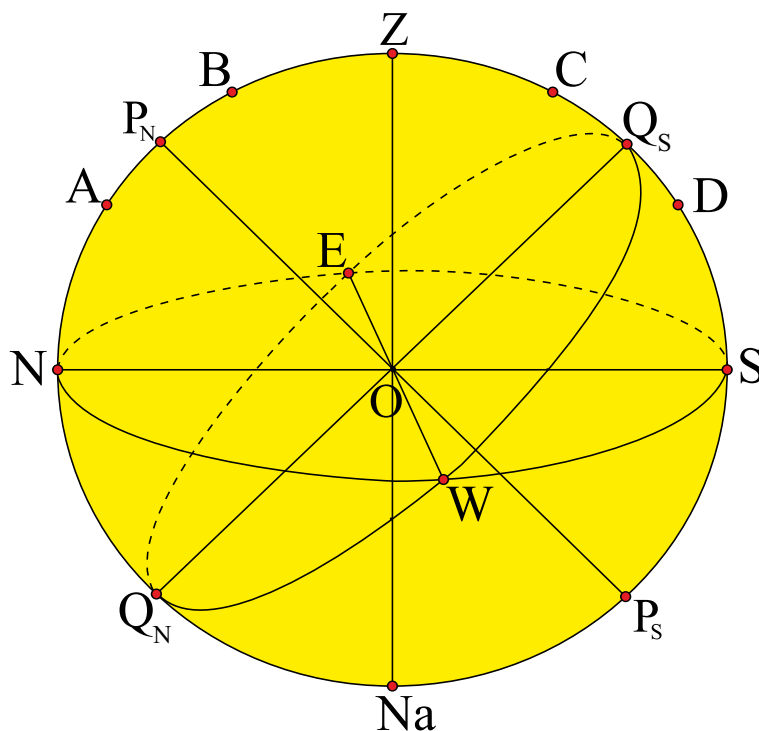


Рис. 2. Небесная сфера для жителя северного географического полушария. Отмечены следующие точки: P_N, P_S – северный и южный полюсы мира, Z, Na – зенит и надир места наблюдения, N, E, S, W – точки севера, востока, юга и запада соответственно; также показаны линии: ZNa – отвесная линия, $P_N P_S$ – ось мира, NS – полуденная линия, EW – линия "восток-запад"; большие круги: $NESW$ – математический горизонт, $Q_N E Q_S W$ – небесный экватор, $P_N Z Q_S P_S Na Q_N$ – небесный меридиан.

1. Если дуги небесного меридиана $\tilde{N}P_N$ и $P_N\tilde{Z}$ полагать равными между собой, т. е.

$$\tilde{N}P_N = P_N\tilde{Z}, \quad (1)$$

то чему будет равна широта места наблюдения жителя? (2 балла)

Варианты ответов:

1. 0°	2. 15°	3. 30°
4. 45°	5. 60°	6. 90°

2. Чему будет равна высота светила, кульминирующего в точке D , если дуги небесного меридиана NA, AB, BZ, ZC, CD, DS равны между собой? Т. е.

$$\overset{\sim}{NA} = \overset{\sim}{AB} = \overset{\sim}{BZ} = \overset{\sim}{ZC} = \overset{\sim}{CD} = \overset{\sim}{DS}. \quad (3 \text{ балла}) \quad (2)$$

Варианты ответов:

1. 0°	2. 15°	3. 30°
4. 45°	5. 60°	6. 90°

3. Чему равно склонение светила, кульминирующего в точке С, при соблюдении вышеуказанных условий (1)-(2)? (3 балла)

Варианты ответов:

1. -45°	2. -15°	3. 0°
4. 15°	5. 45°	6. 60°

4. Житель наблюдает шесть ярких звезд, склонения которых представлены в следующей таблице.

Варианты ответов:

Порядковые номера и склонения звезд		
1. 48°	2. -48°	3. 75°
4. 25°	5. -60°	6. -30°

Установите соответствие между номерами данных звезд и классами небесных тел для данной точки наблюдения. Ответ представьте в виде пар (буква, цифра). (1 балл за правильно указанную пару)

Классы небесных светил по их видимости		
А. Незаходящие светила	Б. Восходящие и заходящие светила	В. Невосходящие светила

Решение.

1. Очевидно, угол $\angle NOZ = 90^\circ$, поскольку отвесная линия перпендикулярна плоскости математического горизонта. С другой стороны, согласно условию задачи, дуги небесного меридиана $\check{N}P_N$ и $P_N\check{Z}$ равны между собой, следовательно каждая из них имеет протяженность 45° . Как известно, высота видимого полюса мира над горизонтом ($\angle NOP_N$, соответствующий дуге $\check{N}P_N$) равна широте места наблюдения φ , т. е.

$$\varphi = \angle NOP_N = \check{N}P_N = 45^\circ.$$

2. Поскольку угол $\angle NOS = 180^\circ$ и выполняется условие (2), значит каждая из дуг $\check{N}A$, $A\check{B}$, $\check{B}\check{Z}$, $\check{Z}\check{C}$, $\check{C}\check{D}$, $\check{D}\check{S}$ небесного меридиана имеет протяженность 30° . Высота звезды, кульминирующей в точке D равна, согласно рисунку, $h_{\max}^{(D)} = \check{D}\check{S} = 30^\circ$.

3. Склонение светила, кульминирующего в точке С, очевидно положительное, поскольку звезда располагается в северной полусфере небосвода, а его величина равна дуге $Q_S C$. Заметим, что углы $\angle ZOQ_S$ и $\angle Q_S OS$ равны между собой, согласно теореме о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами и равенству дуг $\check{N}P_N$ и $P_N\check{Z}$. Значит дуги $\check{Z}\check{Q}_S$ и $Q_S\check{S}$ также равны 45° . Тогда искомое склонение:

$$\delta_*^{(C)} = \check{S}\check{D} + \check{D}\check{C} - \check{S}\check{Q}_S = 60^\circ - 45^\circ = +15^\circ.$$

4. Светило является *незаходящим* для наблюдателя, расположенного в Северном географическом полушарии, если склонение светила удовлетворяет неравенству:

$$\delta_* \geq (90^\circ - \varphi), \Rightarrow \delta_* \geq 45^\circ. \quad (3)$$

Светило является *невосходящим* для наблюдателя, расположенного в Северном географическом полушарии, если склонение светила удовлетворяет неравенству:

$$\delta_* < -(90^\circ - \varphi), \Rightarrow \delta_* < -45^\circ. \quad (4)$$

Наконец, светило является восходящим и заходящим в данном месте, если его склонение удовлетворяет неравенству:

$$-(90^\circ - \varphi) \leq \delta_* < (90^\circ - \varphi), \Rightarrow -45^\circ \leq \delta_* < 45^\circ. \quad (5)$$

В итоге имеем следующее распределение звезд по классам:

Классы небесных светил по их видимости		
А. Незаходящие светила	Б. Восходящие и заходящие светила	В. Невосходящие светила
1, 3	4, 6	2, 5

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
За правильно определенную широту места наблюдения в пункте 1	2
За правильно определенные угловые координаты в пунктах 2-3	3(6)
За каждый правильно определенный класс звезды в пункте 4	1(6)
Максимальный балл за задачу	14

№ 4. «Наблюдения Марса с двух точек поверхности Земли (18 баллов)»

Условие. В некоторый момент времени Марс оказался в верхней кульминации на одной высоте одновременно в двух разных точках (А и В) поверхности Земли. При этом склонение Красной планеты в этот момент было равно $+20^\circ$. Сумма высот Солнца, наблюдавшегося в те же сутки в этих точках в верхней кульминации к югу и к северу от зенита соответственно, составляло $\chi_\odot = h_A^{(\odot)} + h_B^{(\odot)} = +120^\circ$. Определите:

1. Что Вы можете сказать о географических долготах данных точек?
2. Географические широты данных точек (в градусах, до целых).
3. В каких географических полушариях находятся данные точки?
4. Расстояние (в км) между данными пунктами по поверхности Земли.
5. В какие сутки года произошла описанная ситуация, если склонение Солнца было меньше марсианского значения на $43^\circ 26'$?

6. К какой важной точке эклиптики ближе всего располагался Марс?

Решение.

1. Пусть (φ_A, λ_A) и (φ_B, λ_B) – географические (широты, долготы) точек А и В поверхности Земли; δ_σ и $\delta_\odot$ – склонения Марса и Солнца соответственно. Поскольку Марс наблюдался одновременно в верхней кульминации из двух разных точек поверхности Земли, значит данные точки расположены на одном географическом меридиане. Следовательно географические долготы данных точек одинаковы, т. е. $\lambda_A = \lambda_B$. При этом они могут принимать любые значения из интервала $0^\circ \div 360^\circ$.

2. Из двух разных точек одного географического меридиана можно наблюдать светило на одной и той же высоте лишь в случае, если его кульминации в этих точках происходят к северу и к югу от зенита. Запишем выражения для высот Марса и Солнца в данных точках:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_A^{(\sigma)} = 90^\circ \mp \varphi_A \pm \delta_\sigma, \\ h_B^{(\sigma)} = 90^\circ \pm \varphi_B \mp \delta_\sigma \end{array} \right\}, \Rightarrow h_A^{(\sigma)} = h_B^{(\sigma)}, \text{ или } 90^\circ \mp \varphi_A \pm \delta_\sigma = 90^\circ \pm \varphi_B \mp \delta_\sigma, \\ \varphi_A + \varphi_B = 2\delta_\sigma, \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_A^{(\odot)} = 90^\circ \mp \varphi_A \pm \delta_\odot, \\ h_B^{(\odot)} = 90^\circ \pm \varphi_B \mp \delta_\odot \end{array} \right\}, \Rightarrow \chi_\odot = h_A^{(\odot)} + h_B^{(\odot)}, \text{ или } \chi_\odot = 180^\circ \mp (\varphi_A - \varphi_B), \\ \pm (\varphi_A - \varphi_B) = 180^\circ - \chi_\odot. \quad (7)$$

Решая полученную систему уравнений (6), (7) относительно географических широт, получаем две пары ответов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_A = 90^\circ + \delta_\sigma - \chi_\odot/2 = 50^\circ, \\ \varphi_B = \delta_\sigma + \chi_\odot/2 - 90^\circ = -10^\circ \end{array} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{array}{l} \varphi_A = \delta_\sigma + \chi_\odot/2 - 90^\circ = -10^\circ, \\ \varphi_B = 90^\circ + \delta_\sigma - \chi_\odot/2 = 50^\circ \end{array} \right\}. \quad (8)$$

3. Для первой пары ответов: точка А находится в северном, а точка В – в южном географическом полушарии, для второй пары ответов: их положение обратно указанному.

4. Расстояние (в км) между данными пунктами по поверхности Земли можно определить длиной дуги географического меридиана:

$$\ell = \frac{|\varphi_A - \varphi_B|}{360^\circ} \cdot 2\pi R_\oplus = 6672 \text{ км.} \quad (9)$$

5. Согласно условию задачи, склонение Солнца в указанные сутки было меньше марсианского значения на $43^\circ 26'$, т. е. $\delta_\oplus - \delta_\odot = 43^\circ 26'$, тогда $\delta_\odot = -(43^\circ 26' - \delta_\oplus) = -23^\circ 26'$. Последнее значение склонения Солнца достигает в сутки зимнего солнцестояния, т. е. $22 \div 23$ декабря.

6. Как известно, видимый путь движения любой классической планеты по небосводу относительно звезд происходит в малой окрестности эклиптики. Значение склонения Марса близко к значению склонения Солнца ($+23^\circ 26'$) в день летнего солнцестояния. Значит Марс был ближе всего расположен к точке летнего солнцестояния.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Правильный вывод о равенстве географических долгот данных точек + явное указание на возможность любого значения для них из интервала $0^\circ \div 360^\circ$	1 + 1
Вывод о наблюдении Марса в верхней кульминации по разные стороны от зенита + представление системы выражений для высот Марса в верхней кульминации в данных точках + представление системы выражений для высот Солнца в верхней кульминации в данных точках + получено решение системы уравнений относительно географических широт в аналитическом виде (2 пары) + представление двух пар численных значений	1+2+2+2+2
Правильно определены географические полушария нахождения точек А и В для каждой пары решений	2
Корректно рассчитано расстояние между точками по поверхности Земли	2
Рассчитано склонение Солнца в сутки наблюдений + корректно определена дата описанного события	1+1
Правильно определена ближайшая к Марсу важная точка эклиптики	1
Максимальный балл за задачу	18

№ 5. «Орбиты двух тел Солнечной системы (16 баллов)»

Условие. 1. Чему равно максимальное значение сидерического периода (в годах) обращения небесного тела А, движущегося вокруг Солнца по круговой орбите, с поверхности которого еще можно увидеть Солнце невооруженным глазом еще как неточечный объект? Разрешающую способность человеческого глаза принять равной $1'$.

2. Чему равно значение сидерического периода обращения (в годах) небесного тела В, движущегося вокруг Солнца по круговой орбите, с поверхности которого видимая яркость Солнца равна видимой яркости Луны в фазе полнолуния?

3. Определите минимально возможное расстояние (в а. е.) между телами А и В, если их орбиты лежат в одной плоскости.

4. Чему равен угол (в градусах) наибольшей элонгации тела А с поверхности тела В?

Решение. 1. Воспользуемся третьим законом Кеплера в классической форме и установим связь между сидерическими периодами обращения вокруг Солнца и радиусами круговых орбит небесного тела А и Земли:

$$\left(\frac{T_A}{T_\oplus}\right)^2 = \left(\frac{a_A}{a_\oplus}\right)^3, \Rightarrow T_A = T_\oplus \left(\frac{a_A}{a_\oplus}\right)^{3/2}. \quad (10)$$

Из последнего уравнения очевидно, что чем больше будет радиус a_A орбиты небесного тела, тем больше будет его сидерический период T_A . Следовательно, необходимо найти максимально возможное значение радиуса $a_A^{(\max)}$ круговой орбиты небесного тела А.

Согласно условию задачи, разрешающая способность человеческого глаза равна одной угловой минуте. Это означает, что любой объект, наибольший угловой размер которого меньше указанного

значения будет виден как точечный объект. Рассмотрим предельную ситуацию, когда угловой диаметр Солнца $D''_{\odot}$ равен в точности одной угловой минуте, т. е.

$$D''_{\odot} = \frac{2\Re_{\odot}}{\Delta} \times 3438' = 1', \Rightarrow \Delta = a_A^{(\max)} = \frac{2\Re_{\odot}}{D''_{\odot}} \times 3438' = 6876 \Re_{\odot} = 31.97 \text{ а. е.} \quad (11)$$

Учитывая, что $a_{\oplus} = 1 \text{ а. е.}$ – радиус земной орбиты, $T_{\oplus} = 1 \text{ год}$ – звездный год Земли, с использованием формулы (10), получаем $T_A = 180.7 \text{ лет}$.

2. Как и в предыдущем случае определим радиус орбиты a_2 тела 2, с поверхности которого звездная величина Солнца равна видимой звездной величине Луны в полнолуние. Для этого воспользуемся формулой Погсона, связывающие видимые звездные величины Солнца и Луны с их освещенностями:

$$m_{\odot} - m_{\zeta} = -2.5 \lg \left(\frac{E_{\odot}}{E_{\zeta}} \right). \quad (12)$$

Для последних величин воспользуемся законом обратных квадратов:

$$E_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2}, \quad E_{\zeta} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_B^2},$$

здесь $L_{\odot}$ – светимость Солнца в видимом диапазоне. В итоге формулу (12) можно представить как

$$m_{\zeta} - m_{\odot} = 5 \lg \left(\frac{a_B}{a_{\oplus}} \right), \Rightarrow a_B = a_{\oplus} 10^{0.2(m_{\zeta} - m_{\odot})} = 642.69 \text{ а. е.} \quad (13)$$

С использованием закона (10), получаем значение искомого сидерического периода $T_B = 16293 \text{ года}$.

3. Минимальное расстояние между телами А и В будет достигаться в случае, когда они будут располагаться на одной прямой, проходящей через центр Солнца, по одну сторону от последнего. Тогда искомое расстояние $\Delta_{\min}$ будет равно разности радиусов их круговых орбит:

$$\Delta_{\min} = a_B - a_A = 610.72 \text{ а. е.} \quad (14)$$

4. Поскольку орбиты данных тел круговые и лежат в одной плоскости, то в момент наибольшей элонгации тела А с поверхности тела В, эти тела вместе с Солнцем образуют прямоугольный треугольник, при этом прямой угол будет располагаться в вершине с телом А. Тогда угол наибольшей элонгации тела А с поверхности тела В можно легко определить с использованием функции синус:

$$\sin \gamma_{\max} = \frac{a_A}{a_B}, \Rightarrow \gamma_{\max} = \arcsin \left(\frac{a_A}{a_B} \right) = 2.85^\circ. \quad (15)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
С использованием 3-го закона Кеплера получено явное выражение для сидерического периода обращения небесного тела + явно указано, что период максимален при максимальном радиусе круговой орбиты этого тела + явно сформулирован критерий неточности наблюдаемого объекта с использованием разрешающей способности человеческого глаза + использовано явное выражение для углового диаметра небесного тела + рассмотрена предельная ситуация и найден максимальный радиус орбиты + с использованием 3-го закона Кеплера получено численное значение для сидерического периода тела А	1+1+1+1+1+1
С использованием формулы Погсона, установлена связь между видимыми звездными величинами Солнца и Луны и их освещенностями + использован закон обратных квадратов для данных освещенностей + установлена связь между радиусами орбит Земли и тела В + получено явное аналитическое выражение + численный результат для радиуса орбиты тела В + с использованием 3-го закона Кеплера получено численное значение для периода тела В	1+1+1+1+1+1

Название звезды	α_*	δ_*	π''	m_v
Сириус	06 ^h 45 ^m 09 ^s	-16°42'58"	0.38002"	-1.46 ^m
Процион	07 ^h 39 ^m 18 ^s	+05°13'30"	0.28605"	0.38 ^m

Таблица 1. Экваториальные координаты (α_* , δ_*), параллакс (π'') и видимый блеск (m_v) для Сириуса и Проциона.

Рекомендации для жюри (продолжение).

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректно определена конфигурация взаимного расположения тел А и В в случае их наибольшего сближения + получено численное значение для минимального расстояния	1+1
Корректно определена конфигурация взаимного расположения тел А, В и Солнца в наибольшей элонгации тела А + получено численное значение для угла наибольшей элонгации	1+1
Максимальный балл за задачу	16

№ 6. «Полет к звезде Процион (14 баллов)»

Условие. В далеком будущем человечество наверняка сможет путешествовать к звездам. Предположим, что звездолет будущего благополучно долетел до окрестностей звезды Процион. Определите:

1. Какую видимую звездную величину будет иметь Сириус для пилотов звездолета в окрестности данной звезды?
2. С каким объектом земного неба по видимой яркости Сириус можно будет сравнить?
3. Какая звезда выглядит ярче: Сириус с поверхности Земли или Процион из окрестностей Сириуса?

Для земного наблюдателя звезды Сириус и Процион сегодня имеют экваториальные координаты, параллакс и видимый блеск, представленные в табл. 1. Изменением данных параметров от настоящего момента до момента прибытия звездолета в окрестности Проциона следует пренебречь.

Решение. 1. Определим угловое расстояние между Сириусом и Проционом с позиции земного наблюдателя. Определим разности склонений и прямых восхождений данных звезд:

$$\Delta\alpha = \alpha_P - \alpha_S = 13.54^\circ, \quad \Delta\delta = \delta_P - \delta_S = 21.94^\circ. \quad (16)$$

Если построить сферический треугольник, стороны которого образуют (1) круг склонения Сириуса, (2) большой круг, проходящий через Процион и перпендикулярный первому кругу, (3) большой круг, проходящий через данные звезды, то две стороны этого треугольника будут иметь угловые меры, равные $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, а дуга третьего круга будет определять искомое угловое расстояние σ между звездами. Поскольку треугольник прямоугольный, а его стороны не велики, то его можно считать плоским и искомую гипотенузу можно найти по теореме Пифагора:

$$\sigma = \sqrt{\Delta\alpha^2 + \Delta\delta^2} = 25.8^\circ. \quad (17)$$

Далее определим расстояния до Сириуса (r_S) и Проциона (r_P). Как известно, гелиоцентрическое расстояние до звезды, выраженное в парсеках, обратно пропорционально годичному параллаксу, выраженному в угловых секундах, т. е.

$$r_S = \frac{1}{\pi_S''} = 2.631 \text{ пк}, \quad r_P = \frac{1}{\pi_P''} = 3.496 \text{ пк}. \quad (18)$$

С использованием теоремы косинусов вычислим линейное расстояние между данными звездами:

$$\Delta_{SP} = \sqrt{r_S^2 + r_P^2 - 2r_S r_P \cos \sigma} = \sqrt{\frac{1}{\pi_S''^2} + \frac{1}{\pi_P''^2} - \frac{2}{\pi_P'' \pi_S''} \cos \sigma} = 1.61 \text{ пк}. \quad (19)$$

Тогда видимая звездная величина Сириуса из окрестностей Прокциона может быть определена с использованием формулы Погсона:

$$m_S^{(P)} - m_S = -2.5 \lg \left(\frac{E_S^{(P)}}{E_S} \right), \Rightarrow m_S^{(P)} = m_S + 5 \lg \left(\frac{\Delta_{SP}}{r_S} \right) = -2.53^m. \quad (20)$$

При записи последнего выражения был использован закон обратных квадратов для освещенности.

2. Сравнивая полученное значение видимой звездной величины для Сириуса в окрестности Прокциона со справочными данными, приходим к заключению, что Сириус будет наиболее близок по видимой яркости к Юпитеру, расположенному в окрестности своего противостояния.

3. Вычислим видимую звездную величину Прокциона, наблюдаемого из окрестностей Сириуса:

$$m_P^{(S)} = m_P + 5 \lg \left(\frac{\Delta_{SP}}{r_P} \right) = -1.30^m. \quad (21)$$

Из сопоставления полученного результата с видимой звездной величиной Сириуса, наблюдаемого с поверхности Земли, приходим к заключению, что более яркой является Сириус.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Определены разности склонений и прямых восхождений данных звезд + рассмотрен сферический треугольник, в вершинах которого располагаются данные звезды, а также точка пересечения круга склонения Сириуса и большого круга, проходящего через Прокцион и перпендикулярного первому большому кругу + обосновано, что угловые размеры сторон треугольника небольшие, поэтому треугольник можно рассматривать как плоский + с использованием теоремы Пифагора вычислено угловое расстояние между звездами + с использованием связи гелиоцентрического расстояния и годичного параллакса определены гелиоцентрические расстояния до Сириуса и Прокциона + с использованием теоремы косинусов вычислено линейное расстояние между Прокционом и Сириусом + с использованием формулы Погсона и закона обратных квадратов получена видимая звездная величина для Сириуса из окрестности Прокциона	1+1+1+2+ 2+2+2
Показано, что данная звезда по видимой яркости будет наиболее близка к Юпитеру	1
Вычислена видимая звездная величина Прокциона из окрестности Сириуса + показано, что Сириус будет более яркой звездой	1+1
Максимальный балл за задачу	14

На решение задач данного тура Олимпиады школьникам отводится 3 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса α – частицы – $m_\alpha = 6.645 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 3.261 \text{ св. лет} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли – 1360 Вт/м^2
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – 23 часа 56 минут 04 секунды
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус – 6378.14 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Средний (по объему) радиус – 6371.01 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

§4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$

- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.