

Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Муниципальный этап, теоретический тур
2024/2025 учебный год
11 класс

Решения задач и критерии их оценивания

№ 1. «Семейный портрет» Солнечной системы (22 балла)»

Условие. На рис. 1 дана упрощенная схема Солнечной системы (не в масштабе) с указанием нумерации ее основных тел.

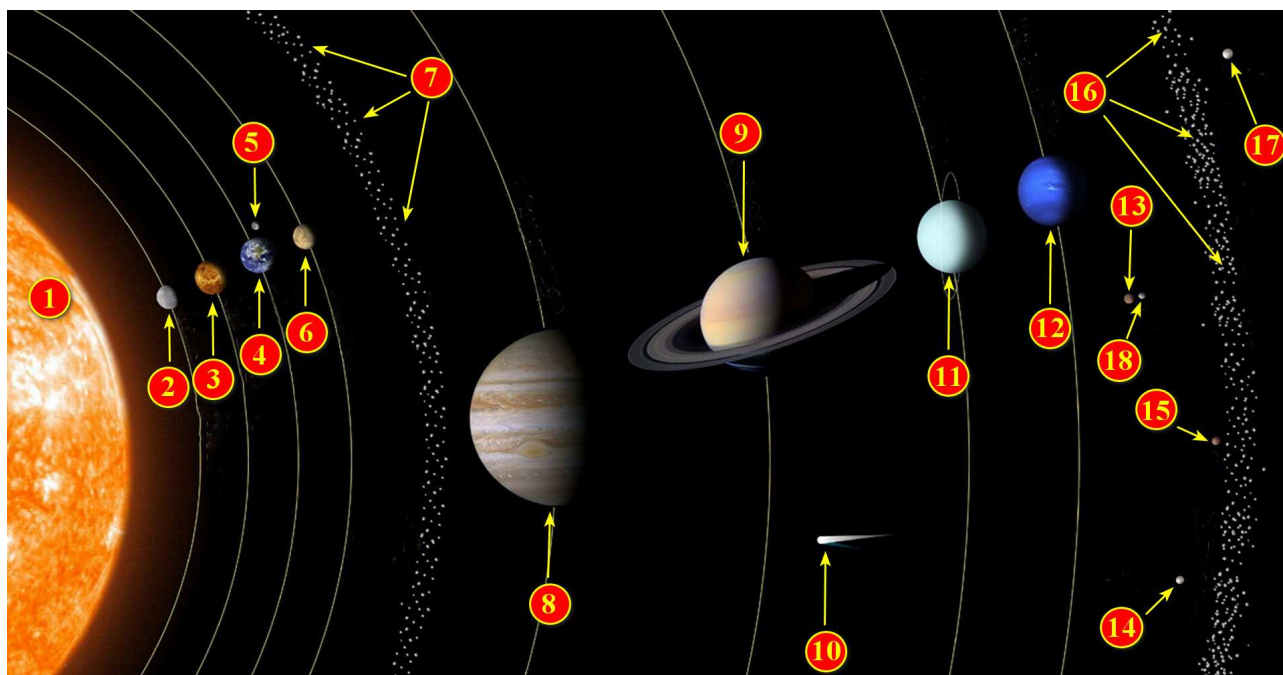


Рис. 1. Основные тела, составляющие Солнечную систему.

1. Установите соответствие между названиями представленных тел или системы тел и номерами, соответствующими им на рисунке. Ответ представьте в виде пар (буква, цифра). (1 балл за правильно указанную пару)

Варианты ответов:

А. Пояс Койпера	Б. Хаумея (карликовая планета)	В. Уран	Г. Венера
Д. Комета	Е. Эрида (карликовая планета)	Ж. Юпитер	З. Харон (спутник Плутона)

Примечание: при решении задачи Вам может оказаться полезным неравенство для средних гелиоцентрических расстояний a_i до планет-карликов:

$$a_{\text{Церера}} < a_{\text{Плутон} + \text{Харон}} < a_{\text{Хаумея}} < a_{\text{Макемаке}} < a_{\text{Эрида}}.$$

2. У какой классической планеты Солнечной системы угловая скорость осевого вращения минимальна? Здесь и далее ответ на вопрос представьте номером, соответствующим данному объекту на рис. 1. (2 балла)

3. Для какой области Солнечной системы выдвигались гипотезы о ее существовании в течение нескольких десятков лет XX столетия, однако первое прямое доказательство ее существования было получено лишь в 1992 году? (2 балла)

4. У какой классической планеты эллиптическая орбита является наиболее вытянутой? (2 балла)

5. Плоскость орбиты какой классической планеты наиболее близка по положению в пространстве к плоскости земной орбиты? (2 балла)

6. С орбит каких классических планет (без учета гравитационных полей последних) невозможно покинуть Солнечную систему с помощью космического корабля, если последний может развивать скорость V относительно Солнца, принадлежащую интервалу (2 балла за каждую планету):

$$0 \text{ км/с} \leq V \leq 35 \text{ км/с.} \quad (1)$$

Решение. 1. Пояс Койпера – это область пространства в Солнечной системе, имеющая форму тора, заполненная ледяными телами, расположенными на гелиоцентрических расстояниях, принадлежащих интервалу:

$$35 \text{ а. е.} \leq r \leq 70 \text{ а. е.,}$$

т. е. за орбитой Нептуна. Этому объекту соответствует область [16].

Хаумея – это карликовая планета, расположенная на окраинах Солнечной системы. С учетом предложенных неравенств нетрудно понять, что на рис. 1 эта планета расположена вблизи внутренней границы пояса Койпера и ей соответствует номер [14].

Уран – это седьмая по удаленности от Солнца классическая планета Солнечной системы. Путем прямого пересчета орбит классических планет легко убедиться в том, что ему соответствует образ под номером [11].

Венера – это вторая по удаленности от Солнца классическая планета. Очевидно, на рис. 1 ей соответствует номер [3].

Комета – это малое тело Солнечной системы, движущееся по сильно вытянутой орбите, и при движении с ее краин к Солнцу, приобретающее газопылевую кому и хвост. Этому объекту соответствует образ [10].

Эрида – это самая далекая от Солнца карликовая планета. С учетом предложенных неравенств нетрудно понять, что на рис. 1 эта планета расположена вблизи внешней границы пояса Койпера и ей соответствует номер [17].

Юпитер – это пятая по удаленности от Солнца и самая большая среди классических планет Солнечной системы. Очевидно, данному телу на рис. 1 соответствует номер [8].

Харон – это небесное тело, которое вместе с Плутоном образует двойную планету в Солнечной системе. Традиционно его называют крупнейшим спутником Плутона, хотя правильно его следует называть компаньоном. Из предложенных неравенств следует, что Плутон вместе Хароном являются ближайшими телами к Солнцу, среди далеких карликовых планет (расположенных в окрестности пояса Койпера). Значит ему на рисунке соответствует номер [18].

В итоге имеем следующие пары тел:

(А, 16)	(Б, 14)	(В, 11)	(Г, 3)
(Д, 10)	(Е, 17)	(Ж, 8)	(З, 18)

2. С использованием справочных данных (колонка 7 таблицы из параграфа 5) самой низкой угловой скоростью осевого вращения планеты и, следовательно, самым большим периодом этого движения обладает Венера [3].

3. Американский астрофизик Джерард Койпер еще в 1951 году одним из первых предсказал существование пояса ледяных тел за орбитой Нептуна. В последствие этот пояс был назван *поясом Койпера* [16], в честь известного ученого. Однако обнаружить его не удавалось в течение нескольких десятилетий. И лишь в 1992 году было получено первое прямое доказательство его существования, в результате обнаружения американскими астрофизиками Д. Джуитт и Дж. Лу с помощью крупного телескопа 1992 QB1 – первого представителя этого пояса.

4. С использованием справочных данных (колонка 4 таблицы из параграфа 6) легко убедиться в том, что *Меркурий* [3] является классической планетой, эллиптическая орбита которой является наиболее вытянутой, поскольку у нее самый большой эксцентриситет.

5. Орбита той классической планеты наиболее близка по положению в пространстве к плоскости земной орбиты, у которой наклонение имеет значение наиболее близкое либо к 0° , либо к 180° . С использованием справочных данных (колонка 5 таблицы из параграфа 6) легко убедиться в том, что данному условию удовлетворяет *Уран* [11].

6. Согласно условию задачи, космический корабль не может развивать скорость относительно Солнца, превышающую 35 км/с. Чтобы на гелиоцентрическом расстоянии r покинуть Солнечную

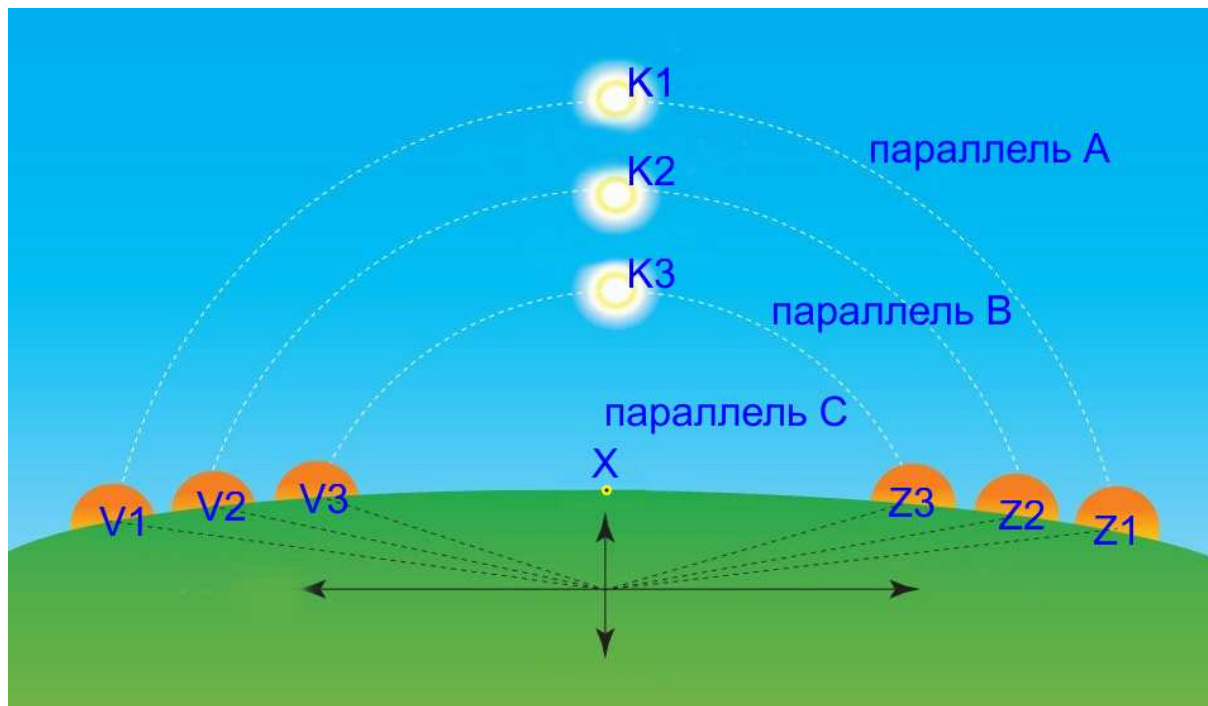


Рис. 2. Суточные параллели (А, В, С), которые описывает Солнце в течение года.

систему, необходимо космическому кораблю развить 2-ую космическую скорость, определяемую формулой:

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2 G M_{\odot}}{a_p}} = \sqrt{\frac{2 G M_{\odot}}{a_{\oplus}}} \sqrt{\frac{a_{\oplus}}{a_p}} > 35 \text{ км/с}, \Rightarrow \frac{a_{\oplus}}{a_p} > \left(\frac{35 \text{ км/с}}{\sqrt{2} V_I^{\oplus}} \right)^2, \Rightarrow a_p < 1.47 \text{ а. е.} \quad (2)$$

С использованием справочных данных (колонка 3 таблицы из параграфа 6) можно легко убедиться в том, что последнему условию удовлетворяют *Меркурий* [2], *Венера* [3] и *Земля* [4]. При записи последнего выражения был учтено, что $a_{\oplus} = 1$ а. е. – радиус круговой орбиты Земли, $V_I^{\oplus} = \sqrt{\frac{G M_{\odot}}{a_{\oplus}}} = 30 \text{ км/с}$ – скорость (первая космическая) Земли на своей круговой орбите.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
За каждую правильно определенную пару в пункте 1	1(8)
За каждый правильно определенный объект в пунктах 2-5	2(8)
За каждую правильно определенную планету в пункте 6	2(6)
Максимальный балл за задачу	22

№ 2. «Дневные пути Солнца по небосводу в течение года (13 баллов)»

Условие. На рис. 2 представлены пограничные суточные параллели (А и С), которые описывает Солнце лишь один раз в течение года, и срединная параллель В, для жителя средних северных широт. Буквами V обозначены его точки восхода, а буквами Z – точки заката.

1. По какой суточной параллели совершает свое дневное движение Солнце в сутки равноденствий (20-21 марта, 22-23 сентября)? (2 балла)

Варианты ответов:

1. Параллель А	2. Параллель В	3. Параллель С	4. Невозможно определить
----------------	----------------	----------------	--------------------------

2. С каким большим кругом можно отождествить суточную параллель В? (2 балла)

Варианты ответов:

1. Математический горизонт	2. Небесный экватор	3. Эклиптика
4. Небесный меридиан	5. Первый вертикал	6. Вертикал светила

3. Как называется точка V_2 математического горизонта? (3 балла)

Варианты ответов:

1. Точка севера	2. Точка юга	3. Точка востока
4. Точка запада	5. Невозможно определить	–

4. Чему равна продолжительность дня (τ_d) в сутки, когда Солнце движется по параллели А? (3 балла)

Варианты ответов:

1. $6 \leq \tau_d < 8$ часов	2. $8 \leq \tau_d < 10$ часов	3. $10 \leq \tau_d < 12$ часов
4. $12 < \tau_d < 24$ часов	5. $\tau_d \geq 24$ часов	6. Невозможно определить

5. Чему равна угловая протяженность дуги видимой части параллели В? Рефракцию света не учитывайте. Свой ответ поясните. (4 балла)

Решение.

1-2. Согласно условию задачи, суточные параллели А и С являются пограничными, по которым Солнце совершает свое суточное движение лишь один раз в год. Суточная параллель В является срединной и расположена на одинаковом расстоянии от пограничных параллелей. Значит ее можно отождествить с *небесным экватором*. В день весеннего/осеннего равноденствия Солнце совершает свое суточное движение вдоль небесного экватора. Следовательно, Солнце совершает свое дневное движение в сутки равноденствия *по параллели В*.

3. Согласно условию задачи, данный рисунок соответствует наблюдаемому жителем средних северных широт. Для него левая половинка рисунка соответствует преимущественно восточной стороне небосвода, а правая – преимущественно западной стороне. Точка пересечения небесного экватора и математического горизонта в восточной стороне небосвода называется *точкой востока*.

4. Согласно рисунку, параллель А является самой высокой среди представленных. Очевидно, Солнце описывает ее в день летнего солнцестояния. В эти сутки для жителей северного географического полушария продолжительность дня является максимальной и очевидно больше 12 часов. Поскольку суточная параллель А пересекается с горизонтом, значит в указанные сутки солнце является восходящим и заходящим светилом. Значит его время пребывания над горизонтом должно быть меньше 24 часов. Правильный ответ: $12 < \tau_d < 24$ часов.

5. Небесный экватор делится точно пополам плоскостью математического горизонта. Следовательно, видимая часть суточной параллели В имеет угловую меру, равную 180° .

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Правильный ответ на вопрос №1,2	2(4)
Правильный ответ на вопрос №3,4,5	3(9)
Максимальный балл за задачу	13

№ 3. «Большой осенний парад планет 2024 года (14 баллов)»

Условие. На рис. 3 представлен результат компьютерной симуляции Большого парада планет (с участием 6 классических планет Солнечной системы: Сатурна, Нептуна, Урана, Юпитера, Марса и Меркурия), произошедшего в конце августа – начале сентября 2024 года, с указанием всех участников парада с позиции наблюдателя, расположенного в северном географическом полушарии.

1. В какую часть суток данную конфигурацию 6 планет можно было наблюдать? Уравнением времени пренебречь. (2 балла)

Варианты ответов:

Часть суток	Вечер	Ночь	Утро	День
Местное среднее время	$18 \div 24$ часа	$00 \div 06$ часов	$06 \div 12$ часов	$12 \div 18$ часов

2. Над какой стороной горизонта располагался Юпитер в момент симуляции парада? (2 балла)

Варианты ответов:



Рис. 3. К определению Большого осеннего парада планет 2024 года.

1. Северо-восток	2. Юго-восток	3. Юго-запад	4. Северо-запад
------------------	---------------	--------------	-----------------

3. Вдоль дуги какого большого круга (представленного на рисунке) приблизительно выстроились 6 планет? (3 балла)

Варианты ответов:

1. Математический горизонт	2. Небесный экватор	3. Небесный меридиан
4. Эклиптика	5. Первый вертикал	6. Колпур равноденствий

4. Какая из представленных планет в момент симуляции парада планет ближе других располагалась к своему положению верхней кульминации? (3 балла)

Варианты ответов:

1. Меркурий	2. Марс	3. Юпитер
4. Сатурн	5. Уран	6. Нептун

5. Оцените длину дуги большого круга (с погрешностью не более $\pm 5^\circ$), вдоль которой расположились 6 указанных планет на момент симуляции. Крайними точками этой дуги считайте точки большого круга, над которыми расположились самая восточная и самая западная планета этого парада. (4 балла)

Решение. 1. Заметим, что в восточной части небосвода, где располагается Меркурий, наблюдается оранжевая заря восходящего Солнца. Такое явление возможно наблюдать непосредственно перед восходом Солнца. Поскольку это явление происходило до дня осеннего равноденствия, значит момент восхода Солнца происходил раньше 6 часов 00 минут, а картина, представленная на рисунке, наблюдалась еще раньше этого времени, значит в интервале $00 \div 06$ часов, т. е. ночью.

2. Согласно рис. 3, Юпитер располагался над стороной «ЮВ», т. е. на *юго-востоке* (2).

3. Как известно, все классические планеты Солнечной системы имеют небольшие наклонения орбит к плоскости земной орбиты, значит на небосводе, они должны располагаться вблизи *эклиптики* – большого круга небосвода, вдоль которого Солнце совершает свое годичное движение относительно далеких звезд. Т. о., большой круг, представленный на рисунке, есть *эклиптика*.

4. Как известно, момент верхней кульминации светила достигается в случае, когда последнее проходит через небесный меридиан, где его высота над горизонтом достигает максимального значения. Плоскость небесного меридиана перпендикулярна горизонту, поэтому на данном рисунке небесный меридиан должен выглядеть в виде прямой, проходящей через точку юга и перпендикулярной линии видимого горизонта. Очевидно, на момент симуляции к данной линии ближе всего располагался *Уран*.

5. Прежде всего заметим, что вдоль видимого горизонта проставлены стороны света и их промежуточные направления с шагом 22.5° (см. рис. 4). Восточная точка пересечения эклиптики

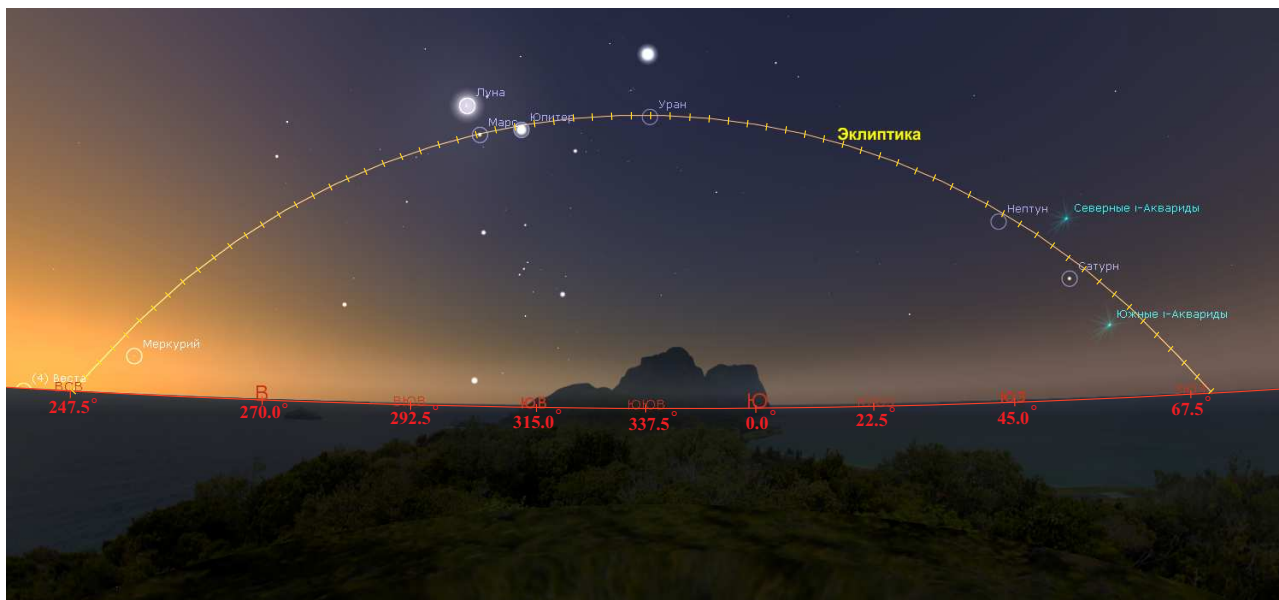


Рис. 4. К определению дополнительных построений на картине симуляции Большого парада планет.

и видимого горизонта, расположенная вблизи ВСВ, имеет астрономический азимут 247.5° , западная точка пересечения в окрестности ЗЮЗ имеет азимут, близкий к 67.5° . Поскольку эклиптика – большой круг, получается, что она пересекается математическим горизонтом пополам в момент симуляции парада. Значит угловая мера видимой части дуги эклиптики близка к 180° . Чтобы определить искомую угловую меру дуги эклиптики, вдоль которой расположились большие планеты, породившие парад, разделим ее на малые отрезки одинаковой длины с общим количеством интервалов не менее 36! В этом случае цена деления такой криволинейной шкалы меньше $180/36 = 5^\circ$. Угловое расстояние Меркурия (самой восточной планеты среди участников парада) от восточной точки пересечения эклиптики и горизонта равно 3.5 интервала. Угловое расстояние Сатурна (самой западной планеты среди участников парада) до западной точки пересечения эклиптики и горизонта составляет 9.4 интервала. Всего на видимой части дуги эклиптики имеется 67 интервалов. Тогда угловое расстояние, отсчитываемое вдоль эклиптики от Меркурия до Сатурна составит

$$\ell = \frac{180^\circ}{67} (67 - 3.5 - 9.4) = 145.3^\circ.$$

В качестве погрешности определения искомой величины примем удвоенную половину цены деления. Половина цены деления – стандартное значение абсолютной погрешности измеряемой физической величины. Двойка возникает от независимого измерения двух координат крайних планет Большого парада. Итоговая погрешность искомой величины составляет $180^\circ/67 = 2.7^\circ$, что меньше заявленного предельного значения.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Правильный ответ на вопрос №1,2	2(4)
Правильный ответ на вопрос №3,4	3(6)
Получена корректная оценка для угловой меры части дуги эклиптики из интервала $140^\circ \div 150^\circ$	4
Максимальный балл за задачу	14

№ 4. «Лунно-солнечные приливы Земли (12 баллов)»

Условие. Как известно, приливообразующие силы Луны и Солнца порождают на поверхности Земли регулярно блуждающие приливные волны. Определите:

1. Промежуток времени, через который данную точку поверхности Земли последовательно проходят два приливных горба, порожденных приливообразующими силами Луны. (4 балла)
2. Промежуток времени, через который данную точку поверхности Земли последовательно проходят два приливных горба, порожденных приливообразующими силами Солнца. (4 балла)

3. На поверхности Земли регулярно наступают моменты, в которые горбы приливных волн Луны и Солнца накладываются друг на друга, образуя *сизигийные* приливные волны с максимально возможной амплитудой. Определите промежуток времени, через который на Земле повторяются сизигийные приливы. (4 балла)

Решение.

1. Лунные приливы, возникающие на поверхности Земли, является результатом действия приливных сил со стороны Луны на тело Земли. Величина последних зависит как от взаимного расположения тел, их масс, так и от выбранной точки наблюдения. Периодичность в изменении величин и направлений этих сил полностью определяется синодическим периодом этого тела по отношению к поверхности Земли, т. е. S_{ζ} . Следует помнить, что Луна, как приливообразующее тело, создает на поверхности Земли два приливных горба/впадины. Каждый из этих горбов с периодом S_{ζ} движется по поверхности Земли, вслед за Луной. Прилив наступает, когда один из таких горбов приходит в данную точку поверхности Земли. Поэтому в данном месте приливы появляются с периодом $\tau_{\zeta} = S_{\zeta} / 2$. Наличие двух приливных горбов является следствием квадрупольной природы приливных сил. Поскольку осевое вращение Земли и орбитальное движение Луны сонаправлены, то синодический период Луны можно определить по формуле:

$$\frac{1}{S_{\zeta}} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\zeta}}, \Rightarrow S_{\zeta} = \frac{T_{\zeta} T_{\oplus}}{T_{\zeta} - T_{\oplus}} = 24^{\text{ч}} 50^{\text{м}}, \Rightarrow \tau_{\zeta} = \frac{S_{\zeta}}{2} = 12^{\text{ч}} 25^{\text{м}}, \quad (3)$$

здесь $T_{\oplus}, T_{\zeta}$ – сидерические периоды осевого вращения Земли и орбитального движения Луны соответственно.

2. Рассуждая аналогичным образом, легко вычислить исконый промежуток времени в случае солнечных приливов:

$$\frac{1}{S_{\odot}} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\odot}}, \Rightarrow S_{\odot} = \frac{T_{\odot} T_{\oplus}}{T_{\odot} - T_{\oplus}} = 24^{\text{ч}} 00^{\text{м}}, \Rightarrow \tau_{\odot} = \frac{S_{\odot}}{2} = 12^{\text{ч}} 00^{\text{м}}, \quad (4)$$

здесь $T_{\oplus}, T_{\odot}$ – сидерические периоды осевого вращения Земли и ее орбитального движения вокруг Солнца.

3. Очевидно, сизигийные приливы наступают при определенном взаимном положении Солнца и Луны – сизигии, т. е. в случае, когда Солнце, Земля и Луна располагаются вдоль одной прямой, при этом приливные силы Луны и Солнца взаимно "помогают" друг другу. Это "усиление" приливов может произойти в любой точке поверхности Земли, следовательно исконый период τ_{syz} полностью определяется сидерическими орбитальными периодами Земли и Луны, не зависит от осевого периода вращения Земли и является по продолжительности половиной синодического месяца Луны S'_{ζ} :

$$\frac{1}{S'_{\zeta}} = \frac{1}{T_{\zeta}} - \frac{1}{T_{\oplus}}, \Rightarrow \tau_{\text{syz}} = \frac{S'_{\zeta}}{2} = \frac{1}{2} \frac{T_{\oplus} T_{\zeta}}{T_{\zeta} - T_{\oplus}} = 14.76 \text{ сут} = 14 \text{ сут } 18.4 \text{ час.} \quad (5)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Получена корректная аналитическая формула + выполнен правильный численный расчет для искомой величины в вопросе 1 ÷ 3	3+1(12)
Максимальный балл за задачу	12

№ 5. «"Пограничник" Солнечной системы (24 балла)»

Условие. На границе Солнечной системы и галактического межзвездного пространства, расположенной от Солнца на расстоянии 120 тыс. а. е. и имеющей форму сферы, находится малое ледяное тело Солнечной системы. Вычислите для него минимальное и максимальное значения следующих его орбитальных параметров: большой полуоси (a), эксцентриситета (ε), сидерического периода (T) его обращения вокруг Солнца, секторной скорости (σ), гелиоцентрических скоростей тела в перигелии (V_q) и афелии (V_Q) его орбиты, в предположении, что последняя полностью лежит внутри данной границы. Искомые значения занесите в табл. 1.

Решение. 1. Большой полуосью эллиптической орбиты называется половина расстояния между двумя наиболее взаимно удаленными точками эллипса (в нашем случае – перигелием

Параметр	a , а. е.	ε	T , год	σ , км ² /год	V_q , км/с	V_Q , км/с
Min-значение						
Мах-значение						

Таблица 1. К определению минимальных и максимальных значений некоторых параметров орбиты малого тела Солнечной системы.

и афелием орбиты). Данную величину можно представить в виде половины от суммы гелиоцентрических расстояний до перигелия (q) и афелия (Q) его эллиптической орбиты:

$$a = \frac{1}{2} (q + Q).$$

Поскольку ледяное тело расположено на сферической границе Солнечной системы радиуса $\mathfrak{R}_{SS} = 1.2 \cdot 10^5$ а. е., при этом орбита тела не выходит за ее пределы, значит расстояние до афелия $Q = \mathfrak{R}_{SS}$. При этом расстояние q не может быть меньше радиуса Солнца $\mathfrak{R}_{\odot}$, в противном случае данное тело упало бы на Солнце еще на ранних этапах эволюции Солнечной системы и было бы уничтожено последним. При этом величина q также не может превышать радиуса $\mathfrak{R}_{SS}$. Т. о., в итоге имеем

$$Q = \mathfrak{R}_{SS}, \quad \mathfrak{R}_{\odot} \leq q \leq \mathfrak{R}_{SS}, \Rightarrow \frac{\mathfrak{R}_{SS}}{2} \leq a \leq \mathfrak{R}_{SS}, \quad \text{или} \quad 6.0 \cdot 10^4 \text{ а. е.} \leq a \leq 1.2 \cdot 10^5 \text{ а. е.} \quad (6)$$

При записи последнего интервала учтено, что $\mathfrak{R}_{\odot} \ll \mathfrak{R}_{SS}$, поэтому $(\mathfrak{R}_{\odot} + \mathfrak{R}_{SS})/2 \approx \mathfrak{R}_{SS}/2$.

2. Эксцентриситетом эллиптической орбиты называется безразмерная скалярная величина, характеризующая степень сплюснутости эллипса, которую можно записать в терминах тех же параметров q и Q :

$$\varepsilon = \frac{Q - q}{Q + q}, \Rightarrow 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (7)$$

3. Для определения сидерического периода обращения данного ледяного тела вокруг Солнца, воспользуемся 3-м законом Кеплера в классической форме:

$$\left(\frac{T}{T_{\oplus}}\right)^2 = \left(\frac{a}{a_{\oplus}}\right)^3, \Rightarrow T = T_{\oplus} \left(\frac{a}{a_{\oplus}}\right)^{3/2}, \quad (8)$$

здесь $a_{\oplus} = 1$ а. е. – большая полуось земной орбиты, $T_{\oplus} = 1$ год – звездный год Земли. С использованием интервала (6), получаем следующий диапазон возможных значений для сидерического периода обращения ледяного тела вокруг Солнца:

$$1.470 \cdot 10^7 \text{ лет} \leq T \leq 4.157 \cdot 10^7 \text{ лет}. \quad (9)$$

4. Секторной скоростью тела в небесной механике называется скалярная физическая величина, равная отношению величины площади S , заметаемой гелиоцентрическим радиусом-вектором планеты за промежуток времени Δt , к величине данного промежутка. Согласно 2-му закону Кеплера, секторная скорость является постоянной величиной при движении планеты по эллиптической орбите, тогда ее можно определить как отношение площади эллипса, описываемого радиусом-вектором планеты за 1 сидерический период, к величине данного промежутка времени:

$$\sigma = \frac{S_{\text{ell}}}{T} = \frac{\pi a b}{T} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T} = \frac{\pi a_{\oplus}^2}{T_{\oplus}} \sqrt{\frac{a}{a_{\oplus}} (1 - \varepsilon^2)}. \quad (10)$$

В случае, когда большая полуось эллиптической орбиты ледяного тела достигает своего минимального значения, эксцентриситет орбиты достигает максимального значения, при этом эллипс вырождается в прямой отрезок, площадь которого равна нулю. Когда большая полуось эллиптической орбиты достигает своего максимального значения, эксцентриситет принимает значение, равное нулю, при этом секторная скорость достигает своего максимума. В итоге имеем следующий интервал для секторной скорости:

$$0 \text{ км}^2/\text{год} \leq \sigma \leq 2.436 \cdot 10^{19} \text{ км}^2/\text{год}. \quad (11)$$

5-6. Гелиоцентрические скорости ледяного тела в перигелии (V_q) и афелии (V_Q) его орбиты представляются в виде:

$$V_q = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_\odot}{a} \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)} = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_\odot}{q} (1+\varepsilon)}, \quad V_Q = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_\odot}{a} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)} = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_\odot}{Q} (1-\varepsilon)}. \quad (12)$$

При записи последних выражений были учтены формулы для q и Q в терминах a и ε :

$$q = a(1 - \varepsilon), \quad Q = a(1 + \varepsilon).$$

С учетом интервалов возможных значений для расстояний q и Q и эксцентриситета, получаем следующие интервалы возможных значений для данных скоростей:

$$\sqrt{\frac{G \mathcal{M}_\odot}{\mathcal{R}_{SS}}} \leq V_q \leq \sqrt{\frac{2 G \mathcal{M}_\odot}{\mathcal{R}_\odot}}, \Rightarrow 0.086 \text{ км/с} \leq V_q \leq 618 \text{ км/с}, \quad (13)$$

$$0 \leq V_Q \leq \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_\odot}{\mathcal{R}_{SS}}}, \Rightarrow 0.000 \text{ км/с} \leq V_Q \leq 0.086 \text{ км/с}. \quad (14)$$

Сводка полученных пограничных значений для искомых величин представлена в табл. 2.

Параметр	a , а. е.	ε	T , год	σ , км ² /год	V_q , км/с	V_Q , км/с
Min-значение	$6.0 \cdot 10^4$	0	$1.47 \cdot 10^7$	0	0.086	0.000
Мах-значение	$1.2 \cdot 10^5$	1	$4.157 \cdot 10^7$	$2.436 \cdot 10^{19}$	618	0.086

Таблица 2. Вычисленные минимальные и максимальные значения некоторых параметров орбиты малого тела Солнечной системы.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Представлена корректная аналитическая формула + представлены правильные численные значения для (нижней + верхней) границы рассматриваемого параметра	2+(1+1) (24)
Максимальный балл за задачу	24

№ 6. «Зеркало Луны на пределе видимости (15 баллов)»

Условие. Определите минимальный линейный диаметр плоского круглого зеркала, которое необходимо установить на поверхности Луны, в точке, ближайшей к Земле, чтобы во время полнолуния оно еще было видно в отраженном солнечном свете невооруженным глазом человека хотя бы из одной точки поверхности Земли. Чему при этом равен угловой диаметр зеркала? Можно ли его разглядеть как неточечный объект в крупный любительский телескоп с диаметром главного зеркала $D_T = 500$ мм? Проницающую силу глаза человека примите равной $m_{\text{гд}} = +6.0^{\text{м}}$, коэффициент отражения зеркала – $A_3 = 0.9$. Ослабление видимой яркости небесного тела, расположенного в зените, обусловленное поглощением света земной атмосферой, считайте равным $\Delta m_{\text{атм}} = 0.3^{\text{м}}$, а орбиты Земли и Луны – круговыми.

Решение. 1. Пусть $E_\odot$ – освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности Луны (Земли)¹. Поток солнечного света, упавшего на зеркало, тогда можно записать в виде:

$$\Phi_{\text{fall}} = E_\odot \frac{\pi}{4} D_3^2, \quad (15)$$

здесь D_3 – искомый линейный диаметр зеркала. Тогда поток отраженного света (с учетом коэффициента отражения A_3) будет равен

$$\Phi_{\text{ref}} = A_3 E_\odot \frac{\pi}{4} D_3^2. \quad (16)$$

2. Данный поток света будет испущен в телесный угол Ω , который можно представить в виде:

$$\Omega = \pi \rho_\odot^2, \quad (17)$$

¹Здесь мы учли, что среднее расстояние от Луны до Земли много меньше расстояния от Солнца до Земли и поэтому далее полагаем, что данные тела находятся на одном расстоянии от Солнца.

здесь $\rho_{\odot}$ – угловой радиус Солнца с позиции земного (лунного) наблюдателя. Тогда освещенность, создаваемая зеркалом у поверхности Земли, будет

$$E_3 = \frac{\Phi_{\text{ref}}}{S} = \frac{\Phi_{\text{ref}}}{\Omega \Delta^2} = \frac{\pi A_3 E_{\odot} D_3^2}{4 \pi \rho_{\odot}^2 \Delta^2} = E_{\odot} \frac{A_3}{4} \left(\frac{D_3}{\rho_{\odot} \Delta} \right)^2, \Rightarrow \frac{E_{\odot}}{E_3} = \frac{1}{A_3} \left(\frac{\rho_{\odot}}{\rho_3} \right)^2,$$

где $\rho_3 = \frac{D_3}{2\Delta}$ – угловой радиус зеркала с позиции земного наблюдателя; $\Delta = a_{\zeta} - \mathfrak{R}_{\oplus} - \mathfrak{R}_{\zeta}$ – расстояние от зеркала до подлунной точки поверхности Земли – ближайшей к Луне точке поверхности Земли, в которой еще можно увидеть зеркало; $a_{\zeta}, \mathfrak{R}_{\zeta}, \mathfrak{R}_{\oplus}$ – радиус орбиты Луны, радиус ее тела и радиус Земли соответственно. Выразим из последнего уравнения угловой радиус зеркала:

$$\rho_3 = \rho_{\odot} \sqrt{\frac{1}{A_3} \frac{E_{\odot}}{E_3}}. \quad (18)$$

3. Чтобы данное зеркало можно было увидеть «на пределе» из подлунной точки земной поверхности (где Луна, кстати, располагается в зените!) необходимо, чтобы его звездная величина у поверхности Земли была не больше $m_{\text{гл}}$. Поглощение света земной атмосферой лишь увеличивает итоговую звездную величину зеркала, значит видимая звездная величина зеркала у поверхности Земли, без учета поглощения света земной атмосферы, должна быть $m_3 = m_{\text{гл}} - \Delta m_{\text{атм}} = 5.7^{\text{m}}$.

4. Далее воспользуемся формулой Погсона для определения связи между освещенностями и звездными величинами:

$$\frac{E_{\odot}}{E_3} = 10^{0.4(m_3 - m_{\odot})}. \quad (19)$$

Из выражений (18)-(19) следует, что

$$\rho_3 = \rho_{\odot} \frac{1}{\sqrt{A_3}} 10^{-0.2(m_3 - m_{\odot})} = \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}} \frac{1}{\sqrt{A_3}} 10^{-0.2(m_{\text{гл}} - \Delta m_{\text{атм}} - m_{\odot})}. \quad (20)$$

Численный расчет дает значение: $\rho_3 = 1.593 \cdot 10^{-9}$ рад = $3.29 \cdot 10^{-4}''$, а угловой диаметр будет $D_3'' = 2\rho_3 = 6.57 \cdot 10^{-4}''$. Следовательно, искомый диаметр зеркала будет равен

$$D_3 = \frac{2}{\sqrt{A_3}} \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}} (a_{\zeta} - \mathfrak{R}_{\oplus} - \mathfrak{R}_{\zeta}) 10^{-0.2(m_{\text{гл}} - \Delta m_{\text{атм}} - m_{\odot})} = 1.20 \text{ м}. \quad (21)$$

5. Определим угловую дифракционную разрешающую способность телескопа с указанным диаметром в видимом свете ($\lambda = 555$ нм):

$$\beta_T'' = 1.22 \frac{\lambda}{D_T} \times 206265'' = 0.28'' \gg D_3''. \quad (22)$$

Из последнего сильного неравенства следует, что даже со столь крупным любительским инструментом невозможно рассмотреть зеркало как неточный объект с поверхности Земли!

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Получена корректная формула для освещенности, создаваемой зеркалом у поверхности Земли	4
Получена корректная формула + правильный численный результат для углового диаметра зеркала	5+1
Получена корректная формула + правильный численный результат для линейного диаметра зеркала	2+1
Вычислена угловая дифракционная разрешающая способность телескопа с указанным диаметром + сделан верный вывод о невозможности наблюдения зеркала с помощью телескопа как неточечного объекта	1+1
Максимальный балл за задачу	15

На решение задач данного тура Олимпиады школьникам отводится 3.5 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса α – частицы – $m_\alpha = 6.645 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 3.261 \text{ св. лет} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли – 1360 Вт/м^2
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – 23 часа 56 минут 04 секунды
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус – 6378.14 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Средний (по объему) радиус – 6371.01 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

§4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$

- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.