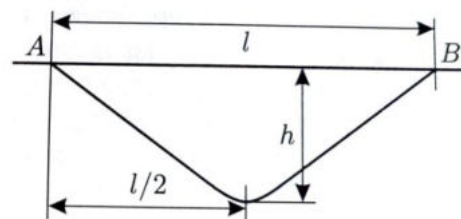


Задание 1. «Оптимизация»

Через неглубокий овраг между строящимися домами (А и В), перекинут мост длиной l . Рабочим необходимо увеличить скорость доставки строительных материалов от одного дома к другому, поэтому они между домами под мостом прорывают



тоннель, состоящий из двух одинаковых прямых участков. По рельсам внутри тоннеля скользит без трения вагонетка. Какова должна быть максимальна глубина тоннеля h , чтобы время поездки от первого дома ко второму было минимальным? Чему это время равно? Принять начальную скорость вагонетки равно нулю, на закруглении в нижней части тоннеля величина скорости не меняется.

Решение:

1. Введем угол наклона прямых участков тоннеля к горизонту – угол α . Тогда вагонетка движется по рельсам с постоянным ускорением $a = g \cdot \sin \alpha$.
2. На первом участке $a > 0$, а на втором $a < 0$. Время, за которое вагонетка пройдет путь на первом участке, равное времени на втором участке.

$$3. S = \frac{at^2}{2} = \frac{l}{2 \cos \alpha}. \text{ Выразим время: } t = \sqrt{\frac{l}{a \cos \alpha}}.$$

4. Полное время в пути:

$$T = 2t = 2\sqrt{\frac{l}{a \cos \alpha}} = 2\sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha \cos \alpha}} = 2\sqrt{\frac{2l}{g \sin 2\alpha}}.$$

5. Это время будет минимальным при максимальном значении $\sin 2\alpha = 1$. Следовательно, $\alpha = 45^\circ$.

$$6. \operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{l} = 1, \text{ значит } h = \frac{l}{2}.$$

7. Минимальное время поездки достигается при данном значении максимальной глубины $T_{\min} = 2\sqrt{2l/g}$.

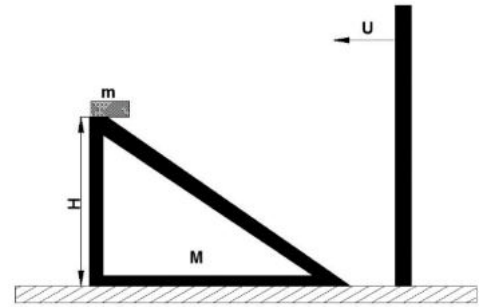
Критерии оценивания:

1. Записано выражение для ускорения в проекции на ОХ, с которым движется вагонетка – **2 балла.**
2. Получено выражение для времени на каждом участке туннеля – **2 балла.**
3. Записано выражение для полного времени – **1 балл.**
4. Найден угол, при котором время будет иметь минимальное значение – **1 балл.**
5. Получено выражение для глубины туннеля – **2 балла.**
6. Получено выражение для минимального времени с учетом максимальной глубины туннеля – **2 балла.**

Всего 10 баллов.

Задание 2. «Царь горы»

На гладкой горизонтальной плоскости покоится гладкий клин высотой H и массой M , на его вершине лежит небольшая шайба массой m . После легкого толчка шайба скатывается с клина и скользит навстречу массивной вертикальной стенке, которая движется в сторону клина со скоростью u . Испытав абсолютно упругий удар со стенкой, шайба скользит в обратном направлении к клину. С какой минимальной скоростью u должна двигаться стенка, чтобы шайба смогла преодолеть клин?



Решение:

Так как трения в системе «шайба-плоскость-клин» нет и удар шайбы о стенку абсолютно упругий, то выполняется закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса.

1. После скатывания шайбы с клина, шайба будет скользить по плоскости вправо, а сам клин - влево. Пусть V – модуль скорости клина, v – модуль скорости шайбы.

$$MV = mv, \quad \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mgh$$
$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1+m/M}} \quad \text{и} \quad V = \frac{m}{M}v = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gH}{1+m/M}}.$$

2. После абсолютно упругого столкновения с движущейся со скоростью u стенкой скорость шайбы изменит свое направление на противоположное и возрастет по величине на $2u$, то есть станет равной $v' = v + 2u$.
3. Когда шайба догонит клин и въедет на максимальную высоту H , необходимую для преодоления клина, они будут двигаться вместе влево с одинаковой скоростью v_1 . Значит из законов сохранения энергии и импульса следует, что

$$MV + mv' = (m + M)v_1$$
$$\frac{MV^2}{2} + \frac{m(v')^2}{2} = \frac{(m + M)v_1^2}{2} + mgh$$

4. Подставляя выражения для V и v , получаем выражение для u :

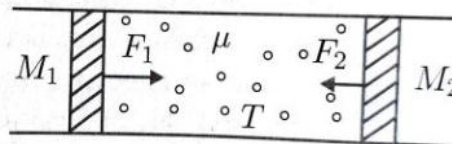
$$u = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \frac{m}{M}}}$$

Критерии оценивания:

5. Записано обоснования применения законов сохранения энергии и импульса – **1 балл.**
6. Записаны законы сохранения энергии и импульса, применительно к шайбе и клину – **1 балл.**
7. Найден модуль скорости клина и модуль скорости шайбы – **2 балла.**
8. Записано изменение скорости шайбы, после столкновения со стенкой - **2 балла.**
9. Записаны выражения для энергии и импульса, после того как шайба догнала клин и въехала на максимальную высоту H - **2 балла.**
10. Получено выражение для минимальной скорости стенки – **2 балла.**
11. Всего **10 баллов.**

Задание 3. «В равновесии»

В длинной горизонтальной трубке сечением S находятся поршни массой M_1 и M_2 . Поршни способны перемещаться без трения. Между поршнями находится идеальный газ в количестве 1 моль, масса которого m много меньше M_1 и M_2 . Каким будет установившееся расстояние между поршнями, если к ним приложить силы F_1 и F_2 , направленные вдоль одной оси противоположно друг другу. Температура газа постоянна и равна T . Трубка находится в вакууме.



Решение:

1. Запишем уравнение движения системы «поршень1-газ-поршень2» в установившемся режиме (движение вправо с ускорением a)

$$(M_1 + M_2 + m)a = F_1 - F_2$$

Так как $m \ll M_1, M_2$, то $a = \frac{F_1 - F_2}{M_1 + M_2}$

2. Давление газа везде одинаково и определяется выражением: $M_1 a = -pS + F_1$

$$p = \frac{M_2 F_1 + M_1 F_2}{(M_1 + M_2)S}$$

3. Объем газа равен $V = \frac{\nu RT}{p} = \frac{RTS(M_1 + M_2)}{M_2 F_1 + M_1 F_2}$, учитывая что $\nu = 1$ моль и установившееся

расстояние между поршнями равно $x = \frac{V}{S} = \frac{\nu RT (M_1 + M_2)}{M_2 F_1 + M_1 F_2}$.

Критерии оценивания:

1. Правильно записано уравнение движения системы – **2 балла**.
2. Записано выражения для ускорения a – **1 балла**.
3. Записано уравнение движения одного из поршней – **2 балл**.
4. Записано выражения для нахождения давления в системе – **1 балл**.
5. Получено выражение для объема газа в системе – **2 балла**.
6. Получено правильное выражение для расстояния между поршнями – **2 балл**.

Всего 10 баллов.

Задача 4. «Электромметр»

Фиксик решил с помощью электромметра исследовать электрическое поле, созданное проводящей сферой радиуса $R = 2$ см и точечным зарядом $q = - 2$ нКл. Для этого он сначала зарядил сферу так, что плотность ее заряда стала равна $\sigma = 2$ мкКл/м². Затем расположил точечный заряд q напротив сферы на расстоянии 3 см от ее поверхности, а сам перешел в точку, расположенную на расстоянии 4 см от центра сферы и на расстоянии 3 см от точечного заряда. Какие показания Фиксик увидел на электромметре?

Решение:

1. Сделаем рисунок, указав относительно положения Фиксика направления векторов напряженности полей, созданных сферой и точечным зарядом.
2. Построим вектор результирующей напряженности по правилу сложения векторов.
3. Заметим, что треугольник, образованный расстояниями r_1 r_2 r_3 , прямоугольный, где
 $r_1 = 5$ – расстояние от центра сферы до точечного заряда;
 $r_2 = 4$ – расстояние от центра сферы до Фиксика;
 $r_3 = 3$ – расстояние от точечного заряда до Фиксика.
4. Следовательно, угол между E_1 и E_2 равен 90° .
5. Применим теорему Пифагора для нахождения результирующей напряженности:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

6. Найдем величины E_1 и E_2 : $E_1 = \frac{k Q_1}{r_2^2}$; $Q_1 = \sigma \cdot S$, где $S = 4\pi R^2$; $E_2 = \frac{kq}{r_3^2}$
7. Запишем выражения для E : $E = \sqrt{\left(\frac{k\sigma 4\pi R^2}{r_2^2}\right)^2 + \left(\frac{kq}{r_3^2}\right)^2} = 60$ кВ/м

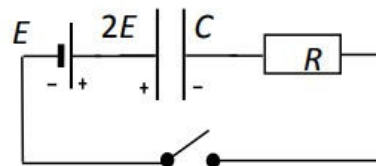
Критерии оценивания:

1. Правильно сделан рисунок: указаны направления векторов напряженности полей сферы и точечного заряда, а также вектор результирующего поля – **1 балл**.
2. Найден угол между E_1 и E_2 в 90° – **1 балл**.
3. Обозначено, что заряженную проводящую сферу можно рассматривать как точечный заряд – **1 балл**.
4. Записано выражение для заряда сферы через поверхностную плотность – **1 балл**.
5. Записаны выражения и найдены значения E_1 и E_2 – **2 балла**.
6. Получено выражение и найдено значение напряженности результирующего поля – **4 балла**.

Всего 10 баллов.

Задание 5. «Электрическая последовательность»

Электрическая цепь состоит из соединённых последовательно идеального источника напряжения с ЭДС $E = 12 \text{ В}$, резистора, разомкнутого ключа и заряженного до напряжения $2E$ конденсатора (полярность указана на схеме). Ключ замыкают.



Определите напряжение U на конденсаторе в тот момент, когда количество теплоты, выделившееся в резисторе, окажется в 3 раза меньше энергии, оставшейся в конденсаторе.

Решение:

1. Полярность зарядки конденсатора всегда останется такой же, какой она была вначале. Так как исходное напряжение на конденсаторе превышает ЭДС источника, то после замыкания ключа ток в цепи потечёт против часовой стрелки.
2. К интересующему нас моменту времени заряд, протекший через источник (и подзарядивший его), равен: $q = C(2E - U)$
3. Запишем закон сохранения энергии с учетом выделившегося тепла и работы источника:

$$\frac{C(2E)^2}{2} = qE + Q + \frac{CU^2}{2}$$

4. По условию задачи количество теплоты, выделившееся в резисторе, в 3 раза меньше энергии, оставшейся в конденсаторе: $Q = \frac{1}{3} \frac{CU^2}{2}$
5. Выражаем напряжение на конденсаторе: $U = \frac{3E}{2} = 18 \text{ В}$.

Критерии оценивания:

1. Определена начальная энергия конденсатора - **1 балл**
2. Найден протёкший через источник заряд - **1 балл**
3. Найдена работа, совершённая источником - **1 балл**
4. Записан закон сохранения энергии - **4 балла**
5. Получено выражение для напряжения на конденсаторе - **2 балла**
6. Получено численное значение напряжения на конденсаторе - **1 балл**

Всего 10 баллов.