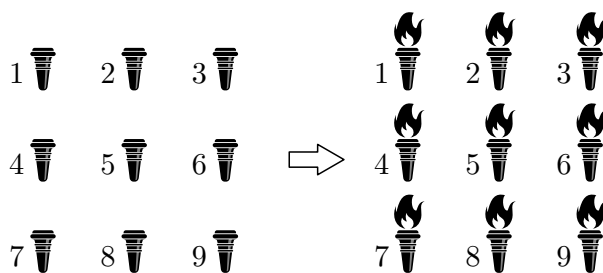


10 класс. Решения задач

1. В игре Дьябло IV есть следующая головоломка. В пещере расположены 9 факелов, как на картинке. За один ход можно потушить любой зажжённый факел или зажечь любой не горящий. Но вместе с выбранным факелом меняется состояние всех соседних с ним по вертикали или по горизонтали, но не по диагонали. Например, если изменить состояние факела №2, то изменится состояние ещё и у факелов №1, №3 и №5. Изначально ни один факел не горит. Покажите, как надо действовать, чтобы в итоге все факелы горели.



РЕШЕНИЕ. Будем называть операцию изменения состояния факела № a и всех его соседей преобразованием № a . Тогда для достижения искомого результата достаточно сделать по одному разу все преобразования с нечётными номерами (в любом порядке). Действительно, среди соседей по стороне любого факела с нечётным номером все имеют чётные номера, поэтому каждый факел с нечётным номером изменит своё состояние ровно один раз. Каждый же факел с чётным номером имеет по три соседа с нечётными номерами, поэтому факелы с чётными номерами изменят своё состояние трижды.

2. Известно, что n — степень двойки. Докажите, что все числа от 1 до n можно расставить в таком порядке $a_1, a_2, \dots, a_n$, что все числа $a_1 + 1, a_2 + 2, \dots, a_n + n$ будут натуральными степенями двойки.

РЕШЕНИЕ. Положим $a_n = n$, тогда $a_n + n$ — степень двойки, на один большая, чем n . Ведь само n — степень двойки. Для остальных чисел положим $a_k = n - k$. Тогда все суммы $a_k + k$ будут равны n .

3. Все люди из класса в субботу гуляли по набережной. Каждый был там один раз в свой промежуток времени. Оказалось при этом, что каждая девочка повстречалась с каждым из мальчиков. Докажите, что был момент времени, в который или все девочки, или все мальчики одновременно были на набережной.

РЕШЕНИЕ. Если в классе всего одна девочка, условие, очевидно, выполняется. Допустим, она не одна. Пусть Д1 — девочка, ушедшая с набережной раньше всех девочек (или любая из таких, если их несколько), и t_1 — время её ухода. Кроме того, пусть Д2 — девочка, пришедшая на набережную позже всех девочек (или любая из таких, если их несколько), и t_2 — время её прихода. Рассмотрим два случая: $t_1 \geq t_2$ и $t_1 < t_2$.

В первом случае в момент времени t_2 все девочки уже пришли на набережную и никто из них ещё не ушёл с набережной. Следовательно, все девочки были на набережной в этот момент времени.

Во втором случае девочки Д1 и Д2 не встречались. Рассмотрим мальчиков. Отметим в начале, что все мальчики пришли на набережную не позже момента времени t_1 . Действительно, в противном случае какой-то мальчик не встретился бы с девочкой Д1, что противоречит условию задачи. С другой стороны, все мальчики ушли с набережной не раньше момента времени t_2 . В самом деле, в противном случае какой-то мальчик не встретился бы с девочкой Д2, что также противоречит условию задачи. Таким образом, в каждый момент t , где $t_1 < t < t_2$, все мальчики были на набережной.

4. Пусть p — простое число. Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем p , лежащих между натуральными числами a и b , $a < b$. Ответ дайте в виде формулы от переменных p , a и b .

РЕШЕНИЕ. Разобьём все интересующие нас числа на группы: пусть k -я группа состоит из чисел, попавших в интервал $(k, k+1)$, $a \leq k \leq b-1$. Сумма дробных частей чисел из каждой группы равна $\frac{1}{p} + \frac{2}{p} + \dots + \frac{p-1}{p} = \frac{p-1}{2}$; число групп равно $b-a$, так что сумма дробных частей всех чисел равна $\frac{(p-1)(b-a)}{2}$. В k -й группе содержится $p-1$ чисел; целая часть у них всех равна k . Таким образом, сумма целых частей всех чисел равна

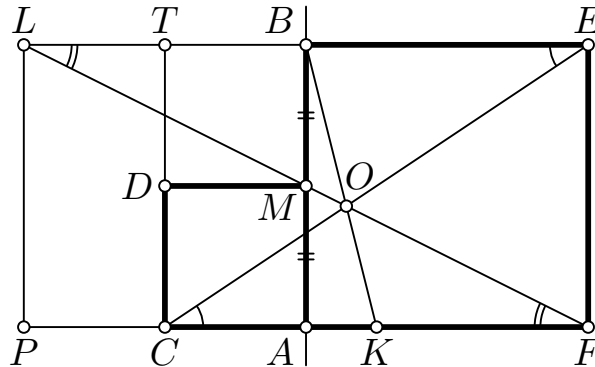
$$(p-1)(a + (a+1) + \dots + (b-1)) = \frac{(p-1)(a+b-1)(b-a)}{2}.$$

Значит, сумма всех чисел равна

$$\frac{(p-1)(b-a)}{2} + \frac{(p-1)(a+b-1)(b-a)}{2} = \frac{(p-1)(b^2 - a^2)}{2}.$$

5. Точка M — середина отрезка AB , $ACDM$ и $ABEF$ — квадраты, лежащие по разные стороны от прямой AB . Прямые CE и MF пересекаются в точке O . Докажите, что прямая BO делит отрезок CF пополам.

РЕШЕНИЕ. Продлим луч FA до точки P так, что $FA = AP$. Продлим луч EB до точки L так, что $EB = BL$.



Квадрат $APLB$ равен квадрату $AFEB$. Продлим CD до пересечения с отрезком BL , точку пересечения обозначим T . Продлим FM до диагонали прямоугольника $FPLE$. Треугольники FOC и LOE подобны по двум углам ($\angle OFC = \angle OLE$ и $\angle OCF = \angle OEL$ как накрест лежащие при параллельных прямых FC и EL и секущих LF и EC соответственно). Коэффициент подобия равен $\frac{3}{4} = \frac{FC}{LE}$. Треугольники LOB и FOK подобны аналогично, с тем же коэффициентом, так как $\frac{OF}{OL} = \frac{3}{4}$. Получаем, что

$$KF = \frac{3}{4}LB = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}FC = \frac{1}{2}FC.$$