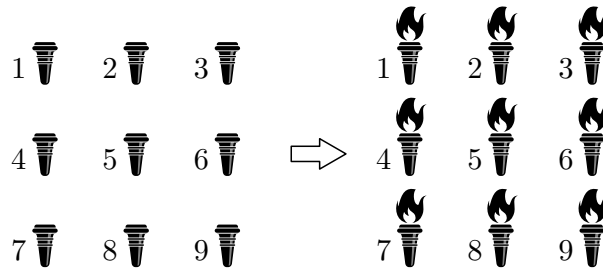


10 класс. Условия задач

1. В игре Дьябло IV есть следующая головоломка. В пещере расположены 9 факелов, как на картинке. За один ход можно потушить любой зажжённый факел или зажечь любой не горящий. Но вместе с выбранным факелом меняется состояние всех соседних с ним по вертикали или по горизонтали, но не по диагонали. Например, если изменить состояние факела №2, то изменится состояние ещё и у факелов №1, №3 и №5. Изначально ни один факел не горит. Покажите, как надо действовать, чтобы в итоге все факелы горели.



2. Известно, что n — степень двойки. Докажите, что все числа от 1 до n можно расставить в таком порядке $a_1, a_2, \dots, a_n$, что все числа $a_1 + 1, a_2 + 2, \dots, a_n + n$ будут натуральными степенями двойки.

3. Все люди из класса в субботу гуляли по набережной. Каждый был там один раз в свой промежуток времени. Оказалось при этом, что каждая девочка повстречалась с каждым из мальчиков. Докажите, что был момент времени, в который или все девочки, или все мальчики одновременно были на набережной.

4. Пусть p — простое число. Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем p , лежащих между натуральными числами a и b , $a < b$. Ответ дайте в виде формулы от переменных p , a и b .

5. Точка M — середина отрезка AB , $ACDM$ и $ABEF$ — квадраты, лежащие по разные стороны от прямой AB . Прямые CE и MF пересекаются в точке O . Докажите, что прямая BO делит отрезок CF пополам.