

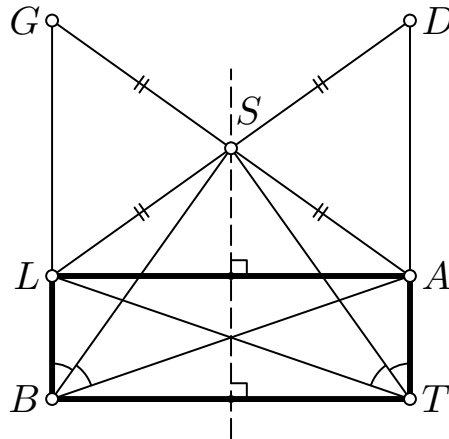
11 класс. Решения задач

1. Известно, что $p \sin 2x + q \sin 3x + r \sin 4x = 0$ для всех значений x . Покажите, что тогда $p = q = r = 0$.

РЕШЕНИЕ. Подставляя вместо x значения $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{4}$, получаем $-q = 0$, $\frac{\sqrt{3}}{2}p - \frac{\sqrt{3}}{2}r = 0$ и $p + \frac{\sqrt{2}}{2}q = 0$ соответственно, откуда сразу всё следует.

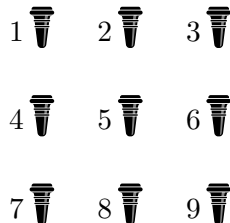
2. Дан прямоугольник $ATBL$. На луче TA отложен отрезок TD , равный TL . Точка S — середина отрезка LD . Докажите, что BS — биссектриса угла LBA .

РЕШЕНИЕ. Треугольник LTD равнобедренный по условию, следовательно, TS , являющаяся медианой, ещё является биссектрисой.



Рассмотрим осевую симметрию относительно прямой, соединяющей середины BT и AL . (Будучи серединой гипотенузы прямоугольного треугольника LAD , точка S лежит на этой прямой, перпендикулярной LA .) Пусть точка D перейдёт в точку G . Очевидно, что точка A перейдёт в L , T в B , S останется на месте. образом треугольника LTD будет треугольник ABG , а значит, эти треугольники равны, отсюда BS является биссектрисой.

3. В игре Дьябло IV есть следующая головоломка. В пещере расположены 9 факелов, как на картинке. За один ход можно потушить любой зажжённый факел или зажечь любой не горящий. Но вместе с выбранным факелом меняется состояние всех соседних с ним по вертикали или по горизонтали, но не по диагонали. Например, если изменить состояние факела №2, то изменится состояние ещё и у факелов №1, №3 и №5. Верно ли, что из любой данной комбинации горящих и не горящих факелов за несколько ходов можно получить любую другую?



РЕШЕНИЕ. Да, верно. Отметим, что если некоторые манипуляции с факелами позволяют зажечь, скажем, факел №1, оставив остальные негорящими, то те же самые манипуляции в другой ситуации просто поменяют состояние факела №1, не изменив состояния остальных. И если можно

поменять состояние каждого факела в отдельности, то из любого состояния факелов можно получить любое другое. Покажем, как изменить состояние трёх типов факелов: углового, среднего по стороне и центрального. Для этого достаточно предъявить манипуляции для факелов №1, №2 и №5. Остальные получаются по аналогии.

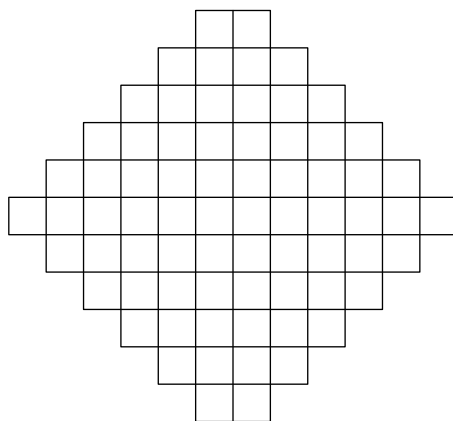
Будем называть операцию изменения состояния факела № a и всех его соседей преобразованием № a .

Для того, чтобы поменять состояние центрального факела №5, нужно последовательно сделать преобразования №2, №6, №8, №4 и №5 (первые четыре — в любом порядке). Действительно, после первых четырёх преобразований факелы с чётными номерами будут гореть, так как их состояние изменилось один раз, а факелы с нечётными номерами гореть не будут, потому что их состояние изменилось чётное число раз (у факела №5 четыре раза, у всех остальных — два раза).

Для того, чтобы поменять состояние углового факела №1, сделаем преобразования №3 и №7, после чего останутся погасшими только факелы №1, №5 и №9. Остаётся сделать преобразования №1, затем №8 и №6.

Наконец, рассмотрим средний по стороне факел №2. Сделаем соответствующее преобразование №2, после чего останется поменять состояние факелов №1, №3 и №5, используя предыдущие пункты решения.

4. В клетках доски, изображённой на рисунке, стоит несколько ладей, которые бьют все клетки (считается, что ладья бьёт клетку, на которой стоит). Докажите, что можно убрать несколько ладей, оставив не более 11, так, чтобы оставшиеся ладьи по-прежнему били все клетки.



РЕШЕНИЕ. Если в каждой строке имеется хотя бы одна ладья, то достаточно оставить по одной ладье в каждой строке, и эти 11 ладей будут бить всю доску. Заметим, что в средней строке обязательно стоит ладья, так как иначе две крайние клетки в ней не будут побиты. Предположим, что в какой-то строке не оказалось ни одной ладьи. Рассмотрим пустую строку максимальной длины. Пусть в ней содержится $2k$ клеток ($k \leq 5$). Тогда во всех строках большей длины (а их ровно $11 - 2k$ штук) есть хотя бы по одной ладье. Кроме того, в любом столбце, пересекающем пустую строку (таких столбцов в точности $2k$), также присутствует ладья. Указанные ладьи бьют все клетки доски, причём их не больше чем $(11 - 2k) + 2k = 11$ штук.

5. Пятьдесят рыцарей короля Артура сидели за круглым столом. Перед каждым из них стоял бокал красного или белого вина. Известно, что на столе стоял хотя бы один бокал красного вина и хотя бы один бокал белого вина. Король два раза хлопнул в ладоши. После первого хлопка каждый рыцарь, перед которым стоял бокал красного вина, взял у своего левого соседа его бокал, а после второго хлопка каждый рыцарь, перед которым стоял бокал белого вина (и, возможно, какой-то ещё бокал), передал этот бокал левому соседу своего левого соседа. Докажите, что кто-то из рыцарей остался без вина.

РЕШЕНИЕ. Предположим, что после обоих хлопков всем рыцарям досталось вино. Тогда каждому досталось ровно по одному бокалу. Допустим, что в начале нашлось два соседних рыцаря с красным вином. Тогда найдётся и такая тройка соседних рыцарей X , Y и Z , что рыцари X и Y держат красное вино, а рыцарь Z — белое вино. Тогда после двух хлопков у рыцаря Y окажутся оба бокала с красным вином, что противоречит предположению. Таким образом, за столом нет соседних рыцарей с красным вином, и, значит, после каждого из хлопков передаются лишь бокалы с белым вином, а бокалы с красным вином остаются на месте.

Рассмотрим произвольного рыцаря A с бокалом красного вина. Обозначим следующих за ним слева направо трёх рыцарей через B , C и D . Если рыцарь C держит красное вино, то в начале он возьмёт себе бокал рыцаря B , а затем передаст его рыцарю A . Если рыцари C и D оба держат бокалы с белым вином, то в итоге бокал рыцаря C окажется у рыцаря A . В обоих этих случаях у A окажется два бокала, что невозможно. Значит, D держит красное вино. Таким образом, между каждыми двумя последовательными рыцарями с красным вином сидят ровно два рыцаря с белым вином. Но это невозможно, поскольку число рыцарей не кратно трём. Через три человека от рыцаря с красным вином должен также находиться рыцарь с красным вином.