

7 класс. Решения задач

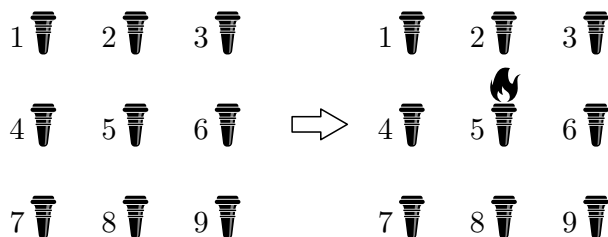
1. Зоопарк состоит из клеток, расположенных так, как показано на рисунке (каждая клетка имеет свой номер). В понедельник утром в каждую клетку посадили панду. Вечером всех панд унесли спать в вольер, а утром во вторник тех же панд снова посадили по одной в клетку так, что те панды, которые были соседями, снова стали соседями (соседями считаются панды, которые сидят в клетках, у которых есть общая сторона). В клетке с каким номером может теперь находиться панда, которая раньше была в клетке с номером 10? (Приведите все варианты и докажите, что других нет.)

6	7	8	9
5		10	
4			
3	2	1	

ОТВЕТ. 9 и 10.

РЕШЕНИЕ. У панды, которая была в клетке 8, было 3 соседа, и других панд с таким количеством соседей нет. Значит, эта панда снова займёт клетку номер 8. Таким образом, у панды, которая занимала десятую клетку, есть три возможности вновь соседствовать с пандой из восьмой: занимать седьмую, девятую или снова десятую. У панды в седьмой клетке два соседа, в девятой и десятой — один. Значит, клетка 7 не подходит. А вот клетки с номерами 9 и 10 подходят — соседи останутся соседями. Очевидно, оба варианта возможны.

2. В игре Дьябло IV есть следующая головоломка. В пещере расположены 9 факелов, как на картинке. За один ход можно потушить любой зажжённый факел или зажечь любой не горящий. Но вместе с выбранным факелом меняется состояние всех соседних с ним по вертикали или по горизонтали, но не по диагонали. Например, если изменить состояние факела №2, то изменится состояние ещё и у факелов №1, №3 и №5. Изначально ни один факел не горит. Покажите, как надо действовать, чтобы оказался зажжённым только центральный факел.



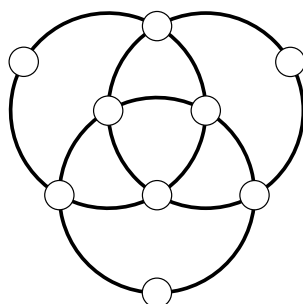
РЕШЕНИЕ. Будем называть операцию изменения состояния факела № a и всех его соседей преобразованием № a . Тогда для достижения искомого результата достаточно последовательно сделать преобразования №2, №6, №8, №4 и №5 (первые четыре — в любом порядке). Действительно, после первых четырёх преобразований факелы с чётными номерами будут гореть, так как их состояние изменилось один раз, а факелы с нечётными номерами гореть не будут, потому что их состояние изменилось чётное число раз (у факела №5 четыре раза, у всех остальных — два раза). Значит, после преобразования №5 факел №5 загорится, а все факелы с чётными номерами погаснут, как нам и надо.

3. У школьников Матвея и Никиты вместе 19 планшето́в диагональю 7 и 12 дюймов. Оказалось, что суммарные длины диагоналей у них совпадают. Какая наибольшая суммарная длина диагоналей может быть у Матвея с Никитой вместе?

ОТВЕТ. 168 дюймов.

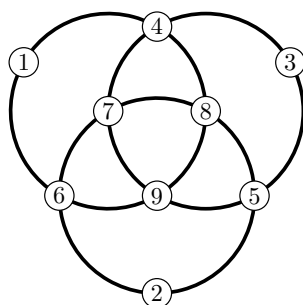
РЕШЕНИЕ. Всего планшето́в 19, поэтому поровну их не разделить. Если у Матвея и Никиты есть у каждого по планшету с диагональю 7, то будем убирать их из рассмотрения, пока такая ситуация имеет место быть, то же сделаем с планшетами с диагональю 12. Теперь у каждого из них могли остаться только планшеты какой-то одной длины диагонали. Чтобы суммы диагоналей были равны, надо «уравновесить» 7 планшетов с диагональю 12, 12-ю планшетами с диагональю 7, так как $\text{НОК}(7, 12) = 84$, то есть это наименьшее число, которое делится и на 7 и на 12. Получается, что это единственная возможная ситуация, потому что в итоге должно быть 19 планшетов. Суммарная диагональ планшетов у Матвея с Никитой вместе равна $7 \cdot 12 + 12 \cdot 7 = 168$.

4. В маленьких кружках на рисунке написаны числа 1, 2, ..., 9, каждое по одному разу. Известно, что сумма чисел на каждой из трёх больших окружностей равна одному и тому же числу S . Найдите наибольшее возможное значение S .



ОТВЕТ. 28.

РЕШЕНИЕ. Сначала оценка. Найдём наибольшую сумму во всех трёх кружочках. Три числа из 1, 2, ..., 9 будут считаться в этой сумме по одному разу (те, которые принадлежат только одной окружности), а оставшиеся шесть — по два раза. Сумма будет наибольшей, если числа, которые считаются по одному разу, будут наименьшими, то есть 1, 2, 3. Получается, что наибольшая сумма чисел на трёх окружностях равна 84. Значит S не превосходит $84/3 = 28$. Пример на рисунке.



5. Саша смастерил странные часы. Минутная стрелка у них неподвижна, а вращаются циферблат и часовая стрелка так, что часы всегда показывают правильное время. Сколько оборотов за сутки делает часовая стрелка таких часов?

РЕШЕНИЕ. В обычных часах минутная стрелка за один час делает один оборот по часовой стрелке. Значит, в сашиных странных часах циферблат за час делает один оборот против часовой стрелки. При этом часовая стрелка в странных часах сдвинется на $1/12$ полного оборота по часовой стрелке. Таким образом, за час часовая стрелка странных часов сдвинется на $11/12$ оборота против часовой стрелки. В сутках 24 часа, поэтому за сутки она сделает $24 \cdot 11/12 = 22$ оборота (против часовой стрелки).