

8 класс. Решения задач

1. Маляр Матвей красит коробку в форме куба со стороной 2 метра за 20 минут. Маляр Никита красит коробку в форме куба со стороной 3 метра за 45 минут. За сколько минут Матвей с Никитой вдвоём покрасят коробку в форме куба со стороной 4 метра?

ОТВЕТ. За 40 минут.

РЕШЕНИЕ. Коробка со стороной 2 метра имеет 6 боковых граней площадью по 4 квадратных метров каждая, итого 24 квадратных метра Матвей красит за 20 минут, то есть по $6/5$ квадратных метра в минуту. Аналогично получаем, что Никита красит с той же скоростью. Значит, вдвоём они красят по $12/5$ квадратных метра в минуту. Им надо покрасить 96 квадратных метров, так что они справятся за 40 минут.

2. Назовём натуральное число изумительным, если оно делится на семь и сумма его цифр равна семи. Найдите наименьшее изумительное число, начинающееся с чётной цифры.

ОТВЕТ. 2023.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, единственное изумительное однозначное число — это 7. Единственные двузначные числа с суммой цифр 7, начинающиеся с чётных цифр — это 25, 43 и 61; ни одно из них не кратно семи. Аналогично перебираются все трёхзначные числа с суммой цифр 7, начинающиеся с чётной цифры: 205, 250, 214, 241, 223, 232, 412, 421, 403, 430, 601, 610; ни одно из них не делится на семь. Четырёхзначные числа 2005 и 2014 имеют сумму цифр 7, но не кратны семи; следующее число с суммой цифр 7 — это 2023, и оно подходит.

3. Двое играют в такую игру. В начале есть кучка из 2023 камней. За один ход можно разделить кучку на две или три непустые кучки. (Кучка называется непустой, если в ней есть хотя бы один камень.) Ходят по очереди, тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнёр?

ОТВЕТ. Первый.

РЕШЕНИЕ. Первым ходом первый должен разделить кучку на три: две равных и одну из одного камня. Затем играть симметрично второму. А именно, когда второй игрок сходит, сделав манипуляцию с имеющейся кучкой, первый повторит то же, но с оставшейся. После этого у каждой новой кучки будет «брат-близнец», значит, второй игрок сможет продолжать действовать аналогичным образом, пока не выиграет.

4. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел от 1 до 120 можно отметить так, чтобы из любых 5 отмеченных чисел можно было выбрать 3, произведение которых делится на 2023? Приведите пример набора с наибольшим числом чисел и объясните, почему не получится составить подходящий набор из ещё большего количества чисел.

ОТВЕТ. 8.

РЕШЕНИЕ. Оценка. Среди любых пяти из отмеченных чисел хотя бы два должны делиться на 17 (так как $2023 = 7 \cdot 17^2$, но $17^2 > 120$, поэтому любое из чисел от 1 до 120 делится максимум на первую степень числа 17). Значит, среди всех отмеченных чисел не больше трёх, не кратных 17. Аналогично, среди всех отмеченных чисел не больше четырёх, не кратных 7. Ровно одно число от 1 до 120 делится и на 7, и на 17 — это 119. Если среди отмеченных чисел есть, кроме 119 (не важно, отмечено оно или нет), хотя бы 8 чисел, то из них не больше трёх не кратны 17, то есть не меньше пяти не кратны 7 — противоречие. Значит, кроме 119, может быть отмечено не более семи чисел, а всего — не более восьми. Пример: 7, 14, 21, 17, 34, 51, 68, 119.

5. Внутри квадрата $SPQR$ возьмём точку C таким образом, что $CQ = QR = RC$. На продолжении отрезка SC за точку C отметим точку A так, что $SA = SQ$. Покажите, что треугольник PCA — равнобедренный.

РЕШЕНИЕ. Треугольник SRC — равнобедренный с углом при вершине R , который равен $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Поэтому $\angle RSC = 75^\circ$, откуда следует, что $\angle PSA = 15^\circ$. Угол PRC тоже равен 15° как разность углов CRQ и PRQ . Треугольники SPA и PCR равны по первому признаку ($SA = SQ = PR$, $SP = CR$, $\angle CRP = \angle PSA = 15^\circ$), откуда $PC = PA$.

