

## 9 класс. Решения задач

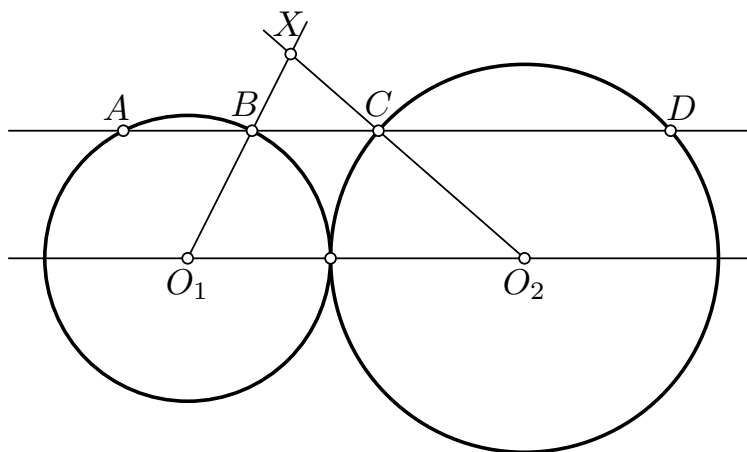
1. В примере на сложение цифры заменили буквами (одинаковым цифрам соответствуют одинаковые буквы, разным — разные):  $HOC + COH = XPXP$ . Какую цифру заменяет буква  $O$ ?

РЕШЕНИЕ. Четырёхзначное число, получающееся при сложении трёхзначных, начинается с единицы, значит,  $X = 1$ . Тогда  $O$  равно нулю или пяти. Действительно, если бы при сложении  $C$  и  $H$  не происходило перехода через разряд, то при записи этого примера в столбик под суммой  $O$  и  $O$  стояла бы чётная цифра. Значит, такой переход был. Но единица под этой суммой может получиться только при равенстве  $O$  нулю или пяти. С другой стороны, если бы  $O$  равнялось пяти, то при сложении её с самой собой тоже происходил бы переход через разряд, так что вторая цифра в сумме не равнялась бы  $P$ . Значит,  $O$  равняется нулю.

2. Мише задали на дом решить уравнение  $x^2 + ax + b = 0$  ( $a, b \neq 0$ ), но он перепутал  $a$  и  $b$  местами. В итоге один корень у Миши получился такой, как нужно, а второй в десять раз больше, чем нужно. Какое уравнение задали решить на дом Мише?

РЕШЕНИЕ. Пусть  $r, s$  — корни исходного уравнения, тогда  $10r, s$  — корни уравнения с перепутанными коэффициентами. По теореме Виета,  $-a = r + s$ ,  $b = rs$ ,  $-b = 10r + s$ ,  $a = 10rs$ . Из второго и четвёртого равенства видим, что  $a = 10b$ . Подставляя это в первое равенство, получаем  $-10b = r + s$ . Отняв это от третьего равенства, находим, что  $b = r$ . Второе равенство теперь даёт  $s = 1$ , ибо  $b \neq 0$ . Значит,  $-r = 10r + 1$ , откуда  $r = -\frac{1}{11}$ . Используя снова формулы Виета, находим исходное уравнение:  $x^2 - \frac{10}{11}x - \frac{1}{11} = 0$ .

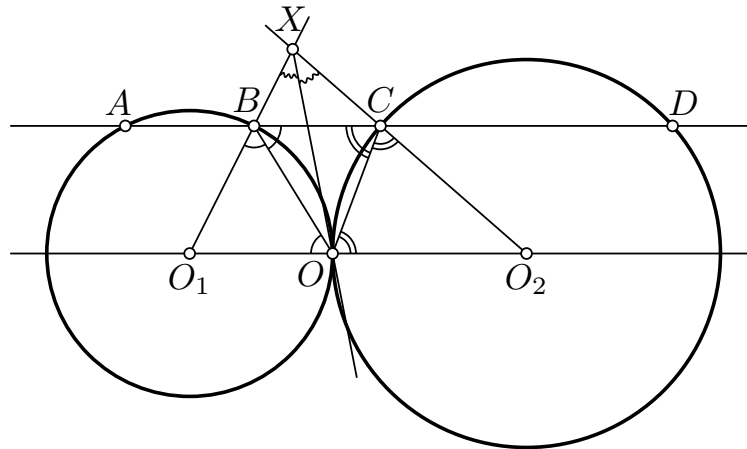
3. Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом. Параллельно  $O_1O_2$  провели прямую, которая пересекает окружности в точках  $A, B, C$  и  $D$  (точки расположены на прямой именно в таком порядке, как на рисунке). Лучи  $O_1B$  и  $O_2C$  пересекаются в точке  $X$ . Докажите, что биссектрисы различных углов  $BXC$ , построенных таким образом, проходят через одну точку.



РЕШЕНИЕ. Покажем, что все такие биссектрисы пересекаются в точке  $O$  касания двух данных окружностей.

Треугольник  $OO_1B$  равнобедренный, ведь две его стороны  $O_1O$  и  $O_1B$  — это радиусы первой окружности. Значит,  $\angle O_1OB = \angle O_1BO$ . По условию, проведенная прямая  $AD$  параллельна  $O_1O_2$ , поэтому  $\angle O_1OB = \angle OBC$  как накрест лежащие. Выходит, что  $\angle OBC = \angle O_1BO$ . Значит,  $BO$  — биссектриса угла  $O_1BC$ . По свойству биссектрисы, точка  $O$  равноудалена от сторон  $O_1B$  и  $BC$  этого угла.

Аналогично,  $CO$  — биссектриса угла  $O_2CB$ , и точка  $O$  равноудалена от сторон  $O_2C$  и  $CB$ . Но тогда  $O$  равноудалена от прямых  $O_1B$  и  $O_2C$ , откуда следует, что она лежит на биссектрисе угла  $O_1XO_2$ .



4. Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 11, лежащих между натуральными числами  $a$  и  $b$ ,  $a < b$ . Ответ дайте в виде формулы от переменных  $a$  и  $b$ .

РЕШЕНИЕ. Разобьём все интересующие нас числа на группы: пусть  $k$ -я группа состоит из чисел, попавших в интервал  $(k, k + 1)$ ,  $a \leq k \leq b - 1$ . Сумма дробных частей чисел из каждой группы равна  $\frac{1}{11} + \frac{2}{11} + \dots + \frac{10}{11} = \frac{10}{2} = 5$ ; число групп равно  $b - a$ , так что сумма дробных частей всех чисел равна  $5(b - a)$ . В каждой группе с номером  $k$  содержится 10 чисел; целая часть у них всех равна  $k$ . Таким образом, сумма целых частей всех чисел равна

$$10(a + (a + 1) + \dots + (b - 1)) = \frac{10(a + b - 1)(b - a)}{2} = 5(a + b - 1)(b - a).$$

Значит, сумма всех чисел равна

$$5(b - a) + 5(a + b - 1)(b - a) = 5(b^2 - a^2).$$

5. Сколько существует девятизначных чисел, делящихся на 9, в десятичной записи которых есть хотя бы одна девятка?

РЕШЕНИЕ. Найдём число всех девятизначных чисел, кратных девяти, а затем вычтем из них все, не содержащие девятки. Всего девятизначных чисел  $9 \cdot 10^8$ , значит, кратных девяти будет в девять раз меньше, то есть  $10^8$ . Теперь рассмотрим девятизначные числа, в которых нет девяток. Первую цифру в таких можно выбрать 8 способами (нет 0 и 9), цифры со второй по восьмую 9 способами (нет только девятки). А вот последнюю цифру можно выбрать лишь одним способом, ведь среди цифр от 0 до 8 только одна позволит получить сумму цифр всего числа, кратную девяти (признак делимости на 9). Поэтому девятизначных чисел без девяток, которые делятся на 9, ровно  $8 \cdot 9^7$ . Значит, чисел, делящихся на 9, в десятичной записи которых есть хотя бы одна девятка, будет  $10^8 - 8 \cdot 9^7$ .