

10 класс. Условия задач

1. Делится ли число $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2024}$ на 31?

2. На бесконечной шахматной доске стоит два ферзя, которые не находятся на одной горизонтали, вертикали или диагонали. Сколько на доске может быть клеток, которые бьют обе фигуры? (Напомним, что ферзь бьёт всю горизонталь, всю вертикаль и обе диагонали, на которых находится.)

3. В остроугольном треугольнике PQR на высоте PP_1 выбрана точка T , такая что $\angle QTR = 90^\circ$, H — точка пересечения высот треугольника PQR . На отрезке PH построена окружность как на диаметре. Докажите, что отрезок касательной, построенной из точки Q к этой окружности, равен QT .

4. Докажите, что

$$\sqrt{2025 + \sqrt{2024 + \sqrt{2023 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < 46.$$

5. Известно, что числа $u^2 + v^2$, $u^3 + v^3$, $u^4 + v^4$ являются рациональными. Обязательно ли число $u + v$ тоже является рациональным?