

11 класс. Условия задач

1. Специально выдуманная операция $\heartsuit$ обладает следующими свойствами: $x \heartsuit 0 = 0$ и $x \heartsuit (y + 1) = x \heartsuit y + (x - y)$. Вычислите $100 \heartsuit 10$.

2. Разбойники сели в круг делить награбленное. У каждого из них есть несколько золотых дублонов и несколько серебряных пиастров. Оказалось, что никакие два разбойника, которые сидят не рядом, не могут поделить между собой имеющиеся дублоны и пиастры так, чтобы и дублонов, и пиастров у них стало поровну. Каково наибольшее возможное количество этих разбойников?

3. В квадрате $ABCD$ вершина A и середина стороны CD симметричны относительно прямой ℓ . Найдите отношение площадей частей, на которые прямая ℓ делит квадрат $ABCD$.

4. Вычислите сумму $S = \sin^6 1^\circ + \sin^6 2^\circ + \sin^6 3^\circ + \dots + \sin^6 88^\circ + \sin^6 89^\circ + \sin^6 90^\circ$.

5. В Самаре постоянно ведутся дорожные работы. Первого числа каждого месяца дорожное управление выбирает некоторые улицы города и вводит на них одностороннее движение, ремонтируя вторую половину дорожного полотна, а в конце месяца снова открывает эти дороги. Все операции проводятся так, что проезд между любыми двумя перекрестками в городе остается возможным. Известно, что каждые 10 лет дорожное покрытие города полностью обновляется. Докажите, что можно одновременно на каждой улице города ввести одностороннее движение так, что проезд между любыми двумя пунктами сохранится.