

9 класс. Решения задач

1. Существуют ли два квадратных трёхчлена, не имеющих корней, таких, что их сумма — квадратный трёхчлен, который имеет два разных корня?

ОТВЕТ: да, существуют.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим два квадратных трёхчлена $f(x) = 2x^2 + x + 1$ и $g(x) = -3x^2 - 2x - 1$, легко проверить, что каждый из них не имеет корней. Их сумма равна $-x^2 - x$ — квадратный трёхчлен с двумя корнями -1 и 0 . Существует бесконечно много других примеров. Важно, чтобы в примере одна парабола была ветвями вверх, а другая — вниз, иначе пример точно неправильный.

2. На доске записали пять различных натуральных чисел, потом их стёрли и записали всевозможные суммы троек этих чисел. Какое наименьшее число различных чисел на доске могло получиться при этом?

ОТВЕТ: 7.

РЕШЕНИЕ. Легко заметить, что суммы каких-то двух троек чисел равны тогда и только тогда, когда равны суммы тех пар чисел, которые содержат числа, не вошедшие в рассматриваемые тройки (так как сумма каждой такой пары равна разности всех пяти чисел и суммы соответствующей тройки чисел). Поэтому вместо сумм троек чисел можно рассматривать суммы пар чисел.

Пусть a, b, c, d, e — данные пять чисел. Не нарушая общности, считаем, что $a < b < c < d < e$. Всего для данных пяти чисел существует десять различных пар. В то же время,

$$a + b < a + c < b + c < b + d < c + d < c + e < d + e,$$

и, следовательно, не менее семи сумм пар чисел будут различны.

Осталось привести пример пяти чисел, для которых ровно семь сумм пар чисел (а следовательно, и троек чисел) будут различны. Таким примером могут быть числа 1, 3, 5, 7, 9.

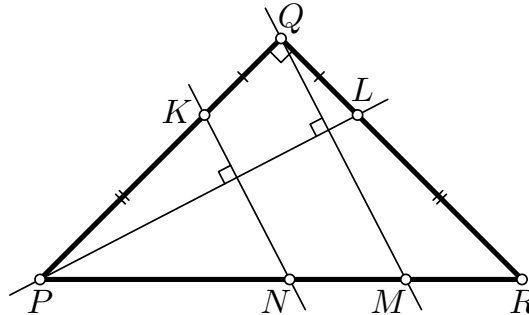
3. Докажите, что если для целых u, v число $u^2 + 3uv + v^2$ делится на 25, то оба числа u и v делятся на 5.

РЕШЕНИЕ. По условию $u^2 + 3uv + v^2$ делится на 25, а значит, делится на 5. Выделив полный квадрат разности, $u^2 + 3uv + v^2 + 2uv - 2uv$ можно представить в виде $(u - v)^2 + 5uv$. Второе слагаемое кратно 5, а значит, и первое тоже. Из того, что $(u - v)^2$ делится на 5, получаем, что $u - v$ делится на 5, поэтому $(u - v)^2$ делится на 25, то есть $5uv$ делится на 25, откуда uv делится на 5. Аналогично выделяя квадрат суммы

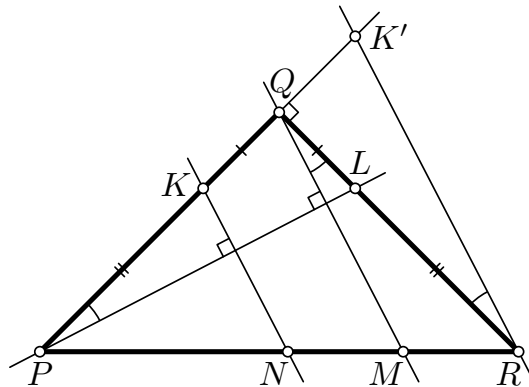
$$u^2 + 3uv + v^2 = u^2 + 2uv + v^2 + 3uv - 2uv = (u + v)^2 + uv,$$

получаем, что сумма $u + v$ делится на 5. Раз разность и сумма делится на 5, то их сумма $2u = u - v + u + v$ тоже делится на 5, отсюда u делится на 5. Наконец u и $u + v$ делится на 5, так что и v делится на 5. Отсюда u и v делятся на 5.

4. На катетах PQ и RQ равнобедренного прямоугольного треугольника PRQ (см. рисунок) отмечены точки K и L соответственно так, что $QK = QL$. Перпендикуляры к прямой PL , проходящие через точки Q и K , пересекают сторону PR в точках M и N соответственно. Докажите, что $RM = MN$.



РЕШЕНИЕ. Проведём через точку R прямую, параллельную отрезкам QM и KN .



Через K' обозначим точку её пересечения с прямой PQ (см. рисунок). Согласно теореме Фалеса, равенство $RM = MN$ равносильно равенству $QK' = QK$, которое и будем доказывать.

Заметим, что

$$\angle QRK' = \angle RQM = 90^\circ - \angle PQM = \angle QPL.$$

Учитывая равенство $RQ = PQ$, получаем, что прямоугольные треугольники $\triangle QRK'$ и $\triangle QPL$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $QK' = QL = QK$, что и требовалось доказать.

5. В множестве $\{a, b, c, d, e, f\}$ выбрано 32 подмножества, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

РЕШЕНИЕ. Докажем от противного. Предположим, что у них нет общего элемента, то есть для любого элемента подмножества из 32 есть подмножество, в котором этот элемент не содержится. Заметим, что среди этих 32 подмножеств нет подмножеств из одного элемента, так как если взять ещё подмножество, где этого элемента нет и любое третье, то их пересечение будет пусто, что противоречит условию задачи. Похожим образом можно объяснить, что двухэлементных множеств нет, достаточно взять одно множество, где нет первого элемента двухэлементного множества и второе, в котором нет второго, пересечение снова будет пусто. Таким образом среди 32 подмножеств нет одноэлементных и двухэлементных. Назовём подмножество B дополнением к подмножеству A , если оно содержит все элементы исходного множества $\{a, b, c, d, e, f\}$, которых нет в подмножестве A . Таким образом все подмножества исходного множества разбиваются на пары (само подмножество и его дополнение), причём из каждой пары в 32 выбранных подмножествах может быть только одно, так как пересечение в паре пустое. Посчитаем, сколько вообще подмножеств может быть среди этих 32. Из трёхэлементных только половина, так как они разбиваются на пары из подмножества и его дополнения, любое четырёхэлементное, пятиэлементное и шестиэлементное. Количество k -элементных подмножеств n -элементного множества равно числу сочетаний из n по k по определению (обозначим его $\binom{n}{k}$). Итого, всего подмножеств подходящих под условия выше будет равно

$$\frac{1}{2} \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 32.$$

А значит, эти 32 подмножества — это и есть половина трёхэлементных, все четырёх-, пяти- и шестиэлементные. Однако, среди четырёхэлементных можно выбрать три с пустым пересечением: $\{a, b, c, d\}$, $\{c, d, e, f\}$, $\{a, b, e, f\}$. Противоречие.

10 класс. Решения задач

1. Делится ли число $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2024}$ на 31?

ОТВЕТ: да, делится.

РЕШЕНИЕ. Разобьём сумму на пятёрки подряд идущих слагаемых:

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9) + \dots + (2^{2020} + 2^{2021} + 2^{2022} + 2^{2023} + 2^{2024}).$$

Вынесем в каждой скобке наибольший общий делитель

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^5(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{2020}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4).$$

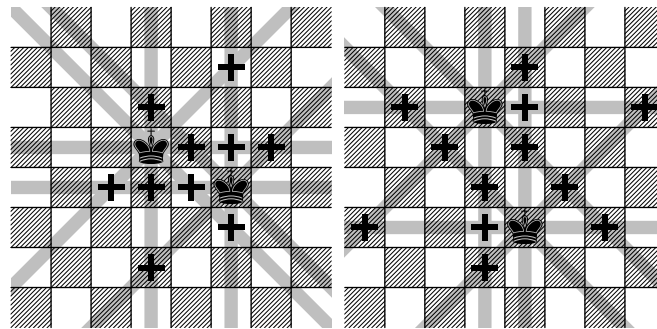
Сумма в каждой скобке будет равна 31, её можно вынести за скобку:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2024} = 31(1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{2020}).$$

2. На бесконечной шахматной доске стоит два ферзя, которые не находятся на одной горизонтали, вертикали или диагонали. Сколько на доске может быть клеток, которые бьют обе фигуры? (Напомним, что ферзь бьёт всю горизонталь, всю вертикаль и обе диагонали, на которых находится.)

ОТВЕТ: 10 или 12.

РЕШЕНИЕ. Ответ зависит от того, стоят ли ферзи на клетках разного цвета или одного цвета.



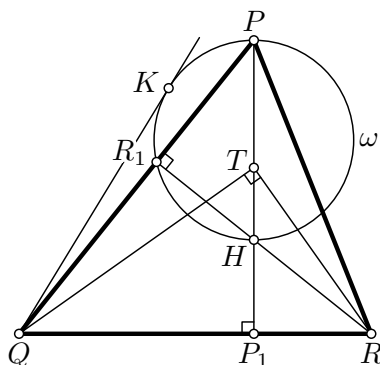
1) Если ферзи стоят на клетках разного цвета (см. левый рисунок), то две «битые» клетки лежат пересечениях «битых» горизонтали и вертикали, а ещё 8 клеток лежат на пересечении «битых» диагоналей с «битыми» горизонталями и вертикалями. Итого: 10 общих «битых» клеток.

2) Если ферзи стоят на клетках одного цвета (см. правый рисунок), то к десяти указанным клеткам добавляются две общие «битые» клетки пересечения «битых» диагоналей.

3. В остроугольном треугольнике PQR на высоте PP_1 выбрана точка T , такая что $\angle QTR = 90^\circ$, H — точка пересечения высот треугольника PQR . На отрезке PH построена окружность как на диаметре. Докажите, что отрезок касательной, построенной из точки Q к этой окружности, равен QT .

РЕШЕНИЕ.

Обозначим через ω окружность с диаметром PH , пусть QK — касательная к ω проведённая из точки Q , RR_1 — высота в треугольнике PQR . Точка R_1 лежит на ω , так как $\angle HR_1P = 90^\circ$. По свойству касательной и секущей в окружности, $QK^2 = QR_1 \cdot QP$.



Прямоугольные треугольники QPP_1 и QRR_1 подобны (общий острый угол Q), отсюда $\frac{QR_1}{QR} = \frac{QP_1}{QP}$, получаем $QR_1 \cdot QP = QP_1 \cdot QR$. Аналогично из подобия QP_1T и QTR (или просто из свойства высоты, проведённой к гипотенузе) получаем $QP_1 \cdot QR = QT^2$. Объединяя все полученное выше, видим, что $QK^2 = QR_1 \cdot QP = QP_1 \cdot QR = QT^2$, то есть $QK = QT$.

4. Докажите, что

$$\sqrt{2025 + \sqrt{2024 + \sqrt{2023 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < 46.$$

РЕШЕНИЕ. Докажем индукцией по n более общее утверждение:

$$\sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{n} + 1.$$

База индукции $1 < 2$ очевидна. Предположим, что для некоторого k это верно:

$$\sqrt{k + \sqrt{k-1 + \sqrt{k-2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{k} + 1.$$

Докажем, что тогда это верно и для $k+1$, для этого возведём левую часть в квадрат и применим к ней предположение индукции:

$$k + 1 + \sqrt{k + \sqrt{k-1 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}} < k + 1 + \sqrt{k} + 1 < k + 1 + 2\sqrt{k+1} + 1 = (\sqrt{k+1} + 1)^2$$

Извлечём корень из левой и правой части, мы можем это сделать так как левая и правая части неравенства положительные, после этого шаг индукции доказан. Подставляем $n = 2025$, получаем неравенство из условия задачи.

5. Известно, что числа $u^2 + v^2$, $u^3 + v^3$, $u^4 + v^4$ являются рациональными. Обязательно ли число $u + v$ тоже является рациональным?

ОТВЕТ: да, обязательно.

РЕШЕНИЕ. Если хоть одно из чисел u , v нулевое, то всё очевидно, так что будем считать, что они оба отличны от нуля. Пусть $u^2 + v^2 = A$, $u^3 + v^3 = B$, $u^4 + v^4 = C$, где A , B , C — рациональные числа. Применяя формулы сокращённого умножения, получаем следующие равенства.:

$$\begin{aligned}u^3 + v^3 &= (u + v)(u^2 - uv + v^2) = (u + v)(A - uv) = B, \\u^4 + v^4 &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 - 2u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = A^2 - 2u^2v^2 = C.\end{aligned}$$

Отсюда $u^2v^2 = \frac{A^2 - C}{2}$, то есть u^2v^2 — рациональное число, обозначим его $D \neq 0$. Рассмотрим следующее произведение:

$$AC - B^2 = (u^2 + v^2)(u^4 + v^4) - (u^3 + v^3)^2 = u^2v^2(u - v)^2 = D(A - 2uv).$$

Получаем, что число $uv = \frac{B^2 - AC}{2D} - \frac{A}{2}$ рационально, обозначим его E . В итоге:

$$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2) = (u + v)(A - E) = B, \quad u + v = \frac{B}{A - E}.$$

(Числа A и E не могут быть равны при ненулевых u и v .)

11 класс. Решения задач

1. Специально выдуманная операция $\heartsuit$ обладает следующими свойствами: $x \heartsuit 0 = 0$ и $x \heartsuit (y + 1) = x \heartsuit y + (x - y)$. Вычислите $100 \heartsuit 10$.

ОТВЕТ: 855.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} 100 \heartsuit 10 &= 100 \heartsuit 9 + 100 - 9 = 100 \heartsuit 8 + 100 - 8 + 100 - 9 = \dots \\ &= 100 \heartsuit 0 + 100 - 1 + 100 - 2 + \dots + 100 - 9 = 900 - (9 + 8 + \dots + 1) = 855. \end{aligned}$$

2. Разбойники сели в круг делить награбленное. У каждого из них есть несколько золотых дублонов и несколько серебряных пиастров. Оказалось, что никакие два разбойника, которые сидят не рядом, не могут поделить между собой имеющиеся дублоны и пиастры так, чтобы и дублонов, и пиастров у них стало поровну. Каково наибольшее возможное количество этих разбойников?

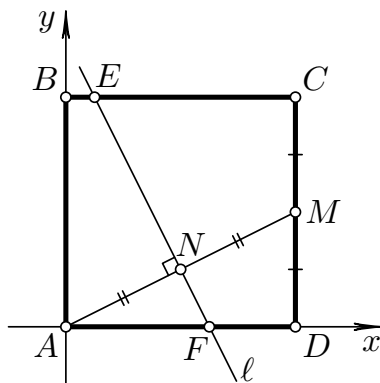
ОТВЕТ: 8.

РЕШЕНИЕ. Оценка. Если два разбойника не могут поделить дублоны и пиастры, то количества дублонов у них имеют разную чётность или количество пиастров у них имеют разную чётность (возможно, и то, и другое). С точки зрения чётности чисел, существует четыре вида пар: (ч, ч), (ч, н), (н, ч), (н, н). Два разбойника, у которых количества монет выражены парой одного вида, могут сидеть только рядом, иначе найдутся два разбойника, не сидящих рядом, у которых чётности количества и дублонов, и пиастров совпадают, и тогда они смогут разделить добычу. Значит, каждой такой пары не может быть более двух в кругу. Следовательно, разбойников не более восьми. Пример: (1, 1), (1, 1), (1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 2).

3. В квадрате $ABCD$ вершина A и середина стороны CD симметричны относительно прямой ℓ . Найдите отношение площадей частей, на которые прямая ℓ делит квадрат $ABCD$.

ОТВЕТ: отношение площади меньшей части к больше равно $\frac{3}{5}$.

РЕШЕНИЕ. Пусть сторона квадрата равна 4, а вершины квадрата на координатной плоскости имеют координаты $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(4, 4)$, $D(4, 0)$.



Если M — середина CD , а N — середина AM , то их координаты равны $M(4, 2)$ и $N(2, 1)$. Так как угловой коэффициент прямой AM равен $\frac{1}{2}$, а прямая ℓ перпендикулярна AM , то её угловой коэффициент равен $k_\ell = -2$. Зная угловой коэффициент прямой ℓ и точку, через которую она проходит, нетрудно найти её уравнение: $-2x - y = -5$. Пусть ℓ пересекает прямую BC в точке E , прямую AD в точке F . Тогда координаты этих точек равны $E\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Тогда

площадь трапеции $ABEF$ равна $S_{ABEF} = \frac{4\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)}{2} = 6$, а площадь трапеции $ECDF$ равна $S_{ECDF} = \frac{4\left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right)}{2} = 10$. Отсюда и следует ответ.

4. Вычислите сумму $S = \sin^6 1^\circ + \sin^6 2^\circ + \sin^6 3^\circ + \dots + \sin^6 88^\circ + \sin^6 89^\circ + \sin^6 90^\circ$.

ОТВЕТ: $\frac{221}{8}$

РЕШЕНИЕ. Все слагаемые, кроме последнего, разобьём на пары: первое с предпоследним, второе с предпредпоследним, и так далее. Без пары останутся два слагаемых: $\sin^6 45^\circ = \frac{1}{8}$ и $\sin^6 90^\circ = 1$. Получатся следующие пары: $(\sin^6 1^\circ + \sin^6 89^\circ)$, $(\sin^6 2^\circ + \sin^6 88^\circ)$, $\dots$, $(\sin^6 44^\circ + \sin^6 46^\circ)$. Преобразуем с помощью тригонометрических формул сумму шестых степеней синуса и косинуса одного и того же угла:

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \sin^6(90^\circ - x) &= \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) \\ &= 1 \cdot ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Обозначим сумму, которую нужно найти в задаче, за S . Тогда

$$S = \frac{1}{8} + 1 + 44 - \frac{3}{4}(\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ).$$

Сумму квадратов синусов разобьём на пары: первое с последним, второе с предпоследним, и так далее. По формулам приведения, сумма в каждой паре будет равна единице. В итоге,

$$S = \frac{1}{8} + 1 + 44 - \frac{3}{4} \cdot 22 = \frac{229}{8}.$$

5. В Самаре постоянно ведутся дорожные работы. Первого числа каждого месяца дорожное управление выбирает некоторые улицы города и вводит на них одностороннее движение, ремонтируя вторую половину дорожного полотна, а в конце месяца снова открывает эти дороги. Все операции проводятся так, что проезд между любыми двумя перекрестками в городе остается возможным. Известно, что каждые 10 лет дорожное покрытие города полностью обновляется. Докажите, что можно одновременно на каждой улице города ввести одностороннее движение так, что проезд между любыми двумя пунктами сохранится.

РЕШЕНИЕ. Индукция по числу городских перекрёстков (из которых исходят более двух дорог). База. Если в Самаре имеются всего два перекрёстка A и B , то утверждение очевидно: по условию из A в B ведут не менее двух дорог; поэтому достаточно установить по одной из этих дорог движение от A к B , а по второй — от B к A , мы сможем проехать от каждого перекрёстка до любого, отличного от него.

Шаг индукции. Рассмотрим город Самара, имеющий $n + 1$ перекрёсток, пусть два соседних из этих перекрёстков — перекрёстки A и B , соединённые улицей AB . Поскольку после введения на улице AB (при её ремонте) одностороннего движения — скажем, от A к B , — проехать от B к A было возможно, то из B в A ведёт некоторая не включающая улицы AB «цепочка» улиц (эту «цепочку» можно считать не имеющей самопересечений). Таким образом, мы приходим к существованию в Самаре «кольца» s — замкнутой сети улиц, ведущей из A в B , а затем (через ряд промежуточных перекрёстков) — снова в A .

Рассмотрим теперь новый город, план которого получается из плана Самары «склеиванием» всех перекрёстков нашего кольца s в один перекрёсток S , из которого исходят все улицы, реально «упирающиеся» в кольцо s . Число перекрёстков такого условного города меньше $n + 1$, поэтому по предположению индукции в нём можно ввести по всем улицам одностороннее движение с соблюдением требований задачи. Если мы затем оставим движение по всем не входящим в кольцо s улицам таким же, каким оно было в этом новом городе, а по кольцу s пустим движение в одном (безразлично, в каком!) направлении, то на всех улицах Самары будет установлено одностороннее движение, и притом с каждого перекрёстка можно будет проехать в любой другой.