

10 класс. Решения задач

1. Существует ли действительное число x такое, что $x + \sqrt{3}$ и $x^2 + \sqrt{3}$ являются рациональными? Рациональным называется число, которое представимо в виде отношения целого числа и натурального.

ОТВЕТ. Да, существует.

РЕШЕНИЕ. Число $x = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$ подходит под условие:

$$x + \sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + \sqrt{3} = \frac{1}{2},$$

$$x^2 + \sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3} = \frac{1}{4} - \sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} = \frac{13}{4}.$$

2. Произведение всех натуральных делителей числа n (включая само n) оканчивается ровно на 15 нулей. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться число n ?

ОТВЕТ. 2.

РЕШЕНИЕ. Оценка. Если у числа n три нуля или больше, то произведение его делителей делится на произведения делителей 1000. Вычислим это произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 125 \cdot 200 \cdot 250 \cdot 500 \cdot 1000.$$

Заметим, что делители можно разбить на пары, произведение которых равно 1000

$$(1 \cdot 1000) \cdot (2 \cdot 500) \cdot (4 \cdot 250) \cdot (8 \cdot 125) \cdot (10 \cdot 100) \cdot (20 \cdot 50) \cdot (25 \cdot 40) = 1000^8 = 10^{24}.$$

Если на конце n три нуля или больше, то на конце произведения делителей n двадцать четыре нуля или больше.

Пример. $n = 400 = 2^4 \cdot 5^2$. Произведение его делителей

$$(1 \cdot 400) \cdot (2 \cdot 200) \cdot (4 \cdot 100) \cdot (5 \cdot 80) \cdot (8 \cdot 50) \cdot (10 \cdot 40) \cdot (16 \cdot 25) \cdot 20 = 400^7 \cdot 20 = 2^{15} \cdot 10^{15},$$

то есть у этого числа на конце ровно 15 нулей.

3. Олег ехал в автобусе №140 из Чапаевска в Самару и от скуки начал записывать степени числа 2 в своем блокноте следующим образом.

Начиная с числа 1, Олег подписывает следующую степень числа 2 в конец списка, а затем меняет порядок чисел в списке на обратный. Назовём такое изменение списка, включая первый шаг, ходом. Первые четыре хода выглядят так:

1 ход: **1**;

2 ход: подписываем справа 2, и в обратном порядке получается **2, 1**;

3 ход: подписываем справа 4, и в обратном порядке получается **4, 1, 2**;

4 ход: подписываем справа 8, и в обратном порядке получается **8, 2, 1, 4**;

и так далее.

Олег успел до прибытия в Самару записать 2026 ходов. Чему равна сумма первых 1013 чисел в 2026-м ходе?

ОТВЕТ. $\frac{2(4^{1013} - 1)}{3}$.

РЕШЕНИЕ. Докажем по индукции следующий факт. На шаге $2n$, первыми n числами будут все нечётные степени двойки от 2^1 до 2^{2n-1} в каком-то порядке.

База индукции. На втором шаге будет 2, 1, то есть первое число — это нечётная степень двойки.

Предположение индукции. При $n = k$ утверждение верно, то есть на шаге $2k$, первыми n числами будут все нечётные степени двойки от 2^1 до 2^{2k-1} в каком-то порядке.

Шаг индукции. Докажем утверждение для $n = 2k + 2$. Рассмотрим шаг $2k$. Числа будут идти в следующем порядке: нечётные степени двойки (от 2 до 2^{2k-1} в каком-то порядке), чётные степени двойки (от 2^0 до 2^{2k-2} в каком-то порядке). После одного шага будет: чётные степени двойки (от 2^0 до 2^{2k} в каком-то порядке), нечётные степени двойки (от 2 до 2^{2k-1} в каком-то порядке). Прделаав ещё один шаг получим, что первые $k + 1$ чисел — все нечётные степени двойки от 2^1 до 2^{2k+1} .

Таким образом нужно вычислить сумму всех нечётных степеней двойки от 2^1 до 2^{2025} . Это геометрическая прогрессия, знаменатель равен 4, а первый член — 2, всего членов прогрессии — 1013. По формуле для суммы геометрической прогрессии получаем

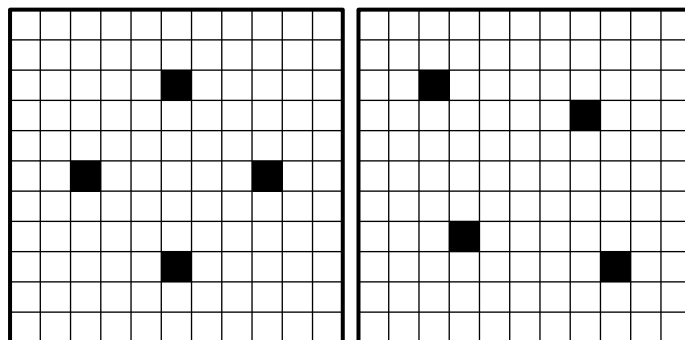
$$\frac{2(4^{1013} - 1)}{4 - 1} = \frac{2(4^{1013} - 1)}{3}.$$

4. Дана сетка 11×11 с 121 ячейкой. Четыре из них окрашены в черный цвет, остальные — в белый. Геннадий хочет вырезать по линиям сетки белый прямоугольник площади ровно N . При каком наибольшем N ему гарантировано удастся это сделать, вне зависимости от расположения чёрных клеток?

Например, если вы хотите доказать, что ответ 60, вы должны объяснить, как вырезать прямоугольник площади ровно 60 при любом расположении чёрных ячеек. И объяснить, почему не получится гарантированно вырезать прямоугольник любой фиксированной площади, большей 60 (61, 62, 63, ...).

ОТВЕТ. 22.

РЕШЕНИЕ. Оценка. На первой картинке единственный прямоугольник площади больше 22, который можно вырезать, это прямоугольник 5×5 площади 25. Но на второй картинке нельзя вырезать прямоугольник площади 25.

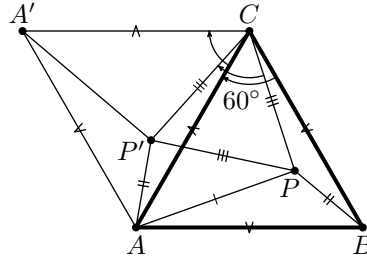


Значит, площадь прямоугольника, который можно вырезать, меньше или равна 22.

Пример. Разделим квадрат 11×11 на вертикальные прямоугольники 2×11 и полосу 1×11 . Больших прямоугольников будет 5, а значит, по принципу Дирихле останется как минимум один без чёрных клеток.

5. Пусть P — внутренняя точка равностороннего треугольника ABC . Докажите, что существует треугольник со сторонами PA , PB , PC .

РЕШЕНИЕ. Выполним поворот вокруг точки C на 60° по часовой стрелке. Образ точки A после поворота обозначим A' , образ точки P — P' . Соединим точку P с A , B , C , P' , а точку P' с A' , B , C . Получим следующий рисунок.



Поворот сохраняет расстояние между точками, поэтому $CP = CP'$, $\angle P'CP$ равен углу поворота, то есть 60° . Отсюда получаем, что $\triangle P'CP$ равносторонний, $CP' = CP = PP'$. При повороте точка B перейдёт в точку A , а значит $BP = AP'$. Получаем, что в треугольнике APP' стороны равны $AP = AP$, $AP' = BP$ и $PP' = CP$, следовательно, нужный треугольник существует.