

11 класс. Решения задач

1. Существует ли действительное число y такое, что $y + \sqrt{3}$ и $y^3 + \sqrt{3}$ являются рациональными? Рациональным называется число, которое представимо в виде отношения целого числа и натурального.

ОТВЕТ. Нет, не существует.

РЕШЕНИЕ. Из того, что $y + \sqrt{3}$ является рациональным получаем, что $y = a - \sqrt{3}$, где a — рациональное. Подставим это в $y^3 + \sqrt{3}$, раскроем скобки и разделим все слагаемые на слагаемые с корнем из трёх и без:

$$y^3 + \sqrt{3} = (a - \sqrt{3})^3 + \sqrt{3} = a^3 - 3\sqrt{3}a^2 + 9a - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = (a^3 + 9a) + (-3a^2 - 2)\sqrt{3}.$$

Первая скобка $(a^3 + 9a)$ — рациональное число, вторая скобка $(-3a^2 - 2)$ — тоже, число $\sqrt{3}$ иррациональное. Если иррациональное умножить на ненулевое рациональное, то получится иррациональное. Если к иррациональному числу прибавить рациональное получится иррациональное. Получаем, что если вторая скобка $(-3a^2 - 2)$ не равна нулю, то результат будет иррациональный, но она равна нулю, если $a^2 = -\frac{2}{3}$, что невозможно.

2. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 98, 99$. Нужно отметить 50 из них, так чтобы сумма любых двух отмеченных не была равна ни 99, ни 100. Сколькими способами это можно сделать?

ОТВЕТ. 1.

РЕШЕНИЕ. Разобьём числа на пары, в сумме дающие 100, получатся пары $(1, 99), (2, 98), \dots, (49, 51)$ и число 50. Если же разделить на пары дающие в сумме 99, получим $(1, 98), (2, 97), \dots, (49, 50)$ и число 99. В каждой паре можно отметить только одно число, а значит, числа 50 и 99 нужно отметить обязательно, если не отмечать хотя бы одно из них, то можно будет отметить максимум сорок девять чисел. Один нельзя отметить, а значит, нужно отметить 98, тогда 2 нельзя отметить, а значит, нужно отметить 97, и так далее. В итоге получим, что отмеченными числами будут 50, 51, $\dots$, 98, 99, а неотмеченными — числа $1, 2, 3, \dots, 48, 49$, и это единственный вариант.

3. Сколько упорядоченных пар натуральных чисел (a, b) удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2025}?$$

ОТВЕТ. 45.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем равенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2025}.$$

Приведём левую часть к общему знаменателю:

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{2025}.$$

Домножим на $2025ab$:

$$2025a + 2025b = ab.$$

Перенесём всё в одну часть, к обеим частям добавим 2025^2 :

$$ab - 2025a - 2025b + 2025^2 = 2025^2.$$

Сгруппируем слагаемые в левой части, получим

$$(a - 2025)(b - 2025) = 2025^2.$$

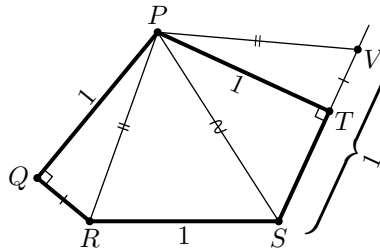
Если a или b меньше 2025, то изначальное равенство неверно, так как $\frac{1}{a}$ или $\frac{1}{b}$ больше $\frac{1}{2025}$. Получается, что количество решений равно количеству способов представить 2025 в виде произведения двух натуральных множителей, то есть количеству натуральных делителей 2025. Разложим 2025 на простые множители: $2025 = 45^2 = 9^2 \cdot 5^2 = 3^4 \cdot 5^2$, тогда $2025^2 = 3^8 \cdot 5^4$. У этого числа $9 \cdot 5 = 45$ делителей.

4. Пусть $PQRST$ — выпуклый пятиугольник $PQ = PT = RS = 1$, $\angle PQR = \angle PTS = 90^\circ$ и $QR + ST = 1$. Вычислите площадь пятиугольника.

ОТВЕТ. 1.

РЕШЕНИЕ. Отметим на продолжении луча ST за точку T точку V так, что $TV = QR$. Тем самым получается, что $SV = ST + TV = ST + QR = 1$. Далее, прямоугольные треугольники PQR и PTV равны, ведь $PQ = PV = 1$, а $TV = QR$ по построению. Значит, $PV = PR$.

Раз треугольники PQR и PTV равны, то площадь данного пятиугольника равна площади четырёхугольника $RPVS$. А его площадь равна удвоенной площади треугольника PSV , ведь $\triangle PRS = \triangle PVS$ по трём сторонам. Имеем: $S = 2 \cdot S_{\triangle PVS} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot PT \cdot VS = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1$



5. По кругу расставлены 9 квадратиков, причём в каждый из квадратиков можно написать букву A , B или C , причём в соседних квадратиках должны быть разные буквы. Сколькими способами это можно сделать?

ОТВЕТ. 510

РЕШЕНИЕ. Обозначим за $A(n)$ число способов записать n букв в ряд, если соседи не могут быть одинаковыми. Заметим, что $A(n) = 3 \cdot 2^{n-1}$, ведь первую букву выбираем тремя способами, а остальные двумя, дабы избежать повторения.

Теперь обозначим за $B(n)$ число способов записать n букв в ряд, если соседи не могут быть одинаковыми и ещё чтобы первая совпадала с последней. Посчитаем $B(n)$. Заполнить позиции с 1 по $n - 1$ существует $A(n - 1)$ способов, но из них нужно убрать те, где $(n - 1)$ -я буква совпадает с n -ой, таких способов $B(n - 1)$. Дополнительно отметим, что $B(3) = 6$: $ABA, ACA, BAB, BCB, CAC, CBC$.

Получаем, что

$$B(n) = A(n - 1) - B(n - 1), \text{ где } n \geq 2.$$

Способы решения задачи получаются из способов составления чисел в ряд так, чтобы соседние числа были разные, а первое и последнее совпадали, выписыванием букв по кругу начиная с некоторого фиксированного места, всех, кроме последней, таким образом, число способов в задаче равно $B(10)$.

Имеем $B(10) = A(9) - B(9) = A(9) - (A(8) - B(8)) = A(9) - A(8) + B(8) = A(9) - A(8) + A(7) - B(7) = \dots = A(9) - A(8) + A(7) - A(6) + A(5) - A(4) + A(3) - B(3) = 3(2^8 - 2^7 + 2^6 - 2^5 + 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2) = 3 \cdot 2(2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 1) = 6 \cdot (-1) \cdot \frac{(-2)^8 - 1}{-2 - 1} = 2 \cdot 255 = 510$.