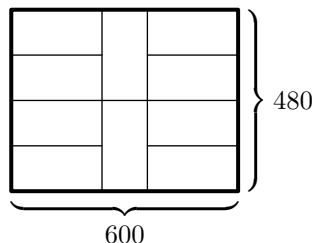


7 класс. Решения задач

1. Прямоугольник на рисунке имеет размеры 600×480 и разделен на 10 меньших равных прямоугольников. Каков периметр каждого из 10 меньших прямоугольников?



ОТВЕТ. 720.

РЕШЕНИЕ. Ширина маленького прямоугольника в четыре раза меньше, чем ширина большого, следовательно, она равна 120, так как ширина большого равна 480. Длина большого равна удвоенной длине маленького плюс ширине маленького. Если обозначить длину маленького за x , получаем $2x + 120 = 600$, отсюда длина маленького равна 240. Периметр равен $120 + 120 + 240 + 240 = 720$.

2. Игорь записал на доске натуральное число N , отличное от единицы. Затем он посчитал квадрат и куб числа N , а после перемножил два получившихся числа. Могла ли у него получиться в итоге шестая степень какого-то натурального числа? Ответ обоснуйте.

ОТВЕТ. Да, могла.

РЕШЕНИЕ. Например, если $N = 2^6 = 64$, то $N^2 \cdot N^3 = 64^2 \cdot 64^3 = 2^{12} \cdot 2^{18} = 2^{30} = (2^5)^6 = 32^6$.

3. У нас есть 105 монет, среди которых, как мы знаем, три фальшивые. Настоящие монеты имеют одинаковый вес, который больше веса фальшивых монет, которые также имеют одинаковый вес. Определите, как можно отобрать 26 настоящих монет за два взвешивания на двухчашечных весах без гирь и делений. (За одно взвешивание разрешается положить на каждую чашу весов любое количество монет.)

РЕШЕНИЕ. Разделим 105 на кучки по 52, 52 и 1 монету.

1 взвешивание. 52 сравниваем с 52.

Если одна кучка весит больше, то в ней либо ноль, либо одна фальшивая.

Если равенство, то в каждой кучке по одной фальшивой и оставшаяся монета тоже фальшивая.

2 взвешивание. Независимо от исхода первого взвешивания у нас есть кучка из 52 монет, где либо 1, либо 0 фальшивых. Делим её пополам и сравниваем 26 и 26.

Если одна перевесила, то в ней нет фальшивых и она искомая.

Если равенство, то обе кучки без фальшивых монет и любая из них подойдёт.

4. В четырёхзначном числе каждую цифру увеличили на 1 или на 5 (после чего из каждой цифры получилась цифра), в результате чего получилось снова четырёхзначное число, которое в четыре раза больше изначального. Каким могло быть исходное число? Надо найти все возможные варианты и доказать, что других нет.

ОТВЕТ. 1717.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим последнюю цифру a исходного числа. Если её умножить на четыре, то последняя цифра получившегося числа должна быть такая же, как у числа $a + 1$ или $a + 5$. Из всех цифр под это условие подходят цифры 5 и 7. Но при прибавлении 1 или 5 должна остаться цифра, поэтому подходит только 7.

$$\begin{array}{llllll} 4 \cdot 0 \neq 1, 5 & 4 \cdot 1 \neq 2, 5 & 4 \cdot 2 \neq 3, 7 & 4 \cdot 3 \neq 14, 18 & 4 \cdot 4 \neq 15, 19 \\ 4 \cdot 5 = 20 & 4 \cdot 6 \neq 27, 31 & 4 \cdot 7 = 28 & 4 \cdot 8 \neq 29, 33 & 4 \cdot 9 \neq 30, 34, 40, 44 \end{array}$$

Теперь известно, что последняя цифра исходного числа — 7. Тогда если предпоследнюю цифру b умножить на 4, последняя цифра результата плюс два равна $b + 1$ или $b + 5$. Под это условие подходит 1 и 3.

Если $b = 1$, то вторая цифра с начала 7, по аналогии с последней, а тогда первая равна снова 1 или 3. Цифра 3 не подходит, так как число станет пятизначным, а число 1717 подходит.

Предположим, что $b = 3$. Если вторую с начала цифру c умножить на 4 и прибавить один, то последняя цифра результата будет равна $c + 1$ или $c + 5$. Под это условие подходит $c = 0$ или 8.

В случае $c = 0$ первая цифра может быть 1 или 2, чтобы не было перехода через разряд, но они не подходят под условие задачи. Если $c = 8$, то первая цифра может быть только 1, но она тоже не подходит под условие задачи.

5. Три мальчика Дима, Миша и Саша играли в футбол по следующим правилам: в первой игре два полевых игрока пытаются забить гол в ворота третьего игрока-вратаря. Тот, кто забивает гол, становится вратарём в следующей игре, и так далее. Позже они рассказали, что Дима был полевым игроком 12 раз, Миша — 21 раз, а Саша 8 раз стоял в воротах. Кто забил шестой гол? Надо найти все возможные варианты и доказать, что других нет.

ОТВЕТ. Дима

РЕШЕНИЕ. Раз Миша 21 раз был полевым игроком, то в воротах в это время стоял кто-то другой. Получается, что что Дима и Саша были в воротах суммарно 21 раз. Саша был там 8 раз, поэтому Дима был вратарём 13 раз. Аналогично, Миша и Саша были вратарями суммарно 12 раз, поэтому Миша был вратарём 4 раза. Итак, всего было сыграно $8 + 4 + 13 = 25$ игр.

Любой игрок не может быть вратарём два раза подряд. Единственный способ для Димы быть вратарём 13 раз в 25 играх — это начать игру в качестве вратаря, а затем быть вратарём как можно чаще, каждую вторую игру. Тогда он начинает игру в качестве вратаря, затем снова встаёт на ворота в третьем раунде, пятом, седьмом... — во всех нечётных раундах. Игрок, который был вратарём в седьмом раунде, забил шестой гол. Значит, шестой гол забил Дима.