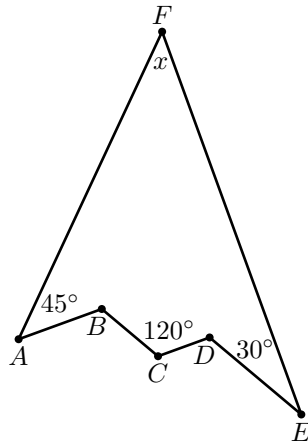


8 класс. Решения задач

1. Учитель Сплинтер написал на доске три трёхзначных числа, сумма которых равна 1000. Все девять цифр в них различны. Приведите пример чисел, которые мог написать Сплинтер (достаточно одного примера)

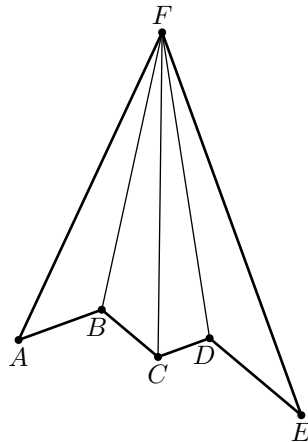
ОТВЕТ. $109 + 237 + 654 = 1000$. Есть и другие ответы, например, можно переставить последние цифры чисел.

2. Дан шестиугольник $ABCDEF$, схематично изображённый на рисунке ниже. Сторона AB параллельна CD , BC параллельна DE . При этом $\angle FAB = 45^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, $\angle DEF = 30^\circ$. Найдите величину угла EFA этого шестиугольника.



ОТВЕТ. 45° .

РЕШЕНИЕ. Проведём FB , FC и FD , шестиугольник разделится на четыре треугольника, то есть сумма углов в нём 720° .



Угол ABC равен углу BCD , как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BC , то есть $\angle ABC = 120^\circ$. Аналогично $\angle CDE = \angle BCD = 120^\circ$. Внутренний угол шестиугольника, дополняющий угол ABC до 360° , равен 240° . Аналогично, внутренний угол шестиугольника, дополняющий угол CDE до 360° , равен 240° . В итоге,

$$x = 720^\circ - 240^\circ - 240^\circ - 120^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

3. Оказалось, что для пары некоторых натуральных чисел m и n верно, что $1 + 3 \cdot 2^m = n^2$. Найдите, чему могут быть равны m и n , и докажите, что других вариантов нет. Напоминаем, что натуральными называются числа $1, 2, 3, 4, \dots$

ОТВЕТ. $m = 4, n = 7$ и $m = 3, n = 5$.

РЕШЕНИЕ. Перенесём единицу в правую часть, получим

$$3 \cdot 2^m = n^2 - 1.$$

Применим формулу сокращенного умножения: у разности квадратов

$$3 \cdot 2^m = (n - 1)(n + 1)$$

в разложении на произведение простых $n - 1$ и $n + 1$ есть только два разных множителя, 2 и 3. Числа $n - 1$ и $n + 1$ должны оба делиться на два, иначе они оба нечётные, а тогда правая часть на два не делится. Если одно из них делится на какую-то степень двойки больше первой, то второе делится только на первую степень двойки, так как разность между ними два, а если второе делилось на большую степень двойки, разность между ними должна быть как минимум равна этой степени. Получается, что одно из чисел либо 2, либо 6, так как оно делится на два, а кроме двойки из простых множителей у него может быть только 3.

Рассмотрим случаи.

1. Если $n - 1 = 2$, то $n + 1 = 4$, вариант не подходит, так как произведение не делится на 3. Если $n + 1 = 2$, $n - 1 = 0$, тоже не получается, ведь $3 \cdot 2^m \neq 2 \cdot 0$.
2. Если $n - 1 = 6$, $n + 1 = 8$, получаем, что $3 \cdot 2^m = 6 \cdot 8$, значит, $m = 4$. Получили решение $m = 4$, $n = 7$.
3. Если $n + 1 = 6$, то $n - 1 = 4$, получаем $3 \cdot 2^m = 4 \cdot 6$, значит, $m = 3$. Получили второе решение $m = 3$, $n = 5$.

4. Дон, Раф и Лео играли в футбол по следующим правилам: в первой игре два полевых игрока пытаются забить гол в ворота третьего игрока-вратаря. Тот, кто забивает гол, становится вратарём в следующей игре и так далее. Позже они рассказали, что Дон был полевым игроком 12 раз, Раф — 21 раз, а Лео 8 раз стоял в воротах. Кто забил шестой гол? Надо найти все возможные варианты и доказать, что других нет.

ОТВЕТ. Дон.

РЕШЕНИЕ. Раз Раф 21 раз был полевым игроком, то в воротах в это время стоял кто-то другой. Получается, что Дон и Лео были в воротах суммарно 21 раз. Лео был там 8 раз, поэтому Дон был вратарём 13 раз. Аналогично, Раф и Лео были вратарями суммарно 12 раз, поэтому Раф был вратарём 4 раза. Итак, всего было сыграно $8 + 4 + 13 = 25$ игр.

Любой игрок не может быть вратарём два раза подряд. Единственный способ для Дона быть вратарём 13 раз в 25 играх — это начать игру в качестве вратаря, а затем быть вратарём как можно чаще, каждую вторую игру. Тогда он начинает игру в качестве вратаря, затем снова встаёт на ворота в третьем раунде, пятом, седьмом. . . — во всех нечётных раундах. Игрок, который был вратарём в седьмом раунде, забил шестой гол. Значит, шестой гол забил Дон.

5. Микки вписал в каждую клетку поля 4×4 по цифре, а затем выписал восемь последовательностей цифр, которые можно было прочесть в строках (слева направо) и столбцах (сверху вниз) таблицы. Шрёдер захотел всё запутать, добавил в список ещё четыре последовательности, а затем всё перемешал. В результате чего получился следующий список из двенадцати последовательностей цифр:

0022
0052
0505
0520
2020
2022
2025
2522
2550
5050
5052
5505

Какие последовательности добавил Шрёдер? Найдите все варианты и докажете, что других нет.

ОТВЕТ. 0022, 0052, 5050, 5052 (только один вариант, он добавил эти 4 последовательности).

РЕШЕНИЕ. Заметим, что на второй позиции у всех последовательностей либо 0, либо 5. Тогда последовательности во второй строке и во втором столбце изначальной таблицы 4×4 целиком состоят из 0 и 5. Последовательностей из нулей и пятёрок в списке три: 0505, 5050 и 5505. Так как вторая цифра у двух данных последовательностей должна быть общей, это будут последовательности 0505 и 5505. Не умаляя общности, запишем 0505 во второй столбец, а 5505 — во вторую строку.

Заметим, что у последовательностей в 1 и 4 столбцах и в 4 строке вторая цифра — 5. В списке осталось всего 3 подходящих последовательности: 0520, 2522 и 2550. В 4 строке не может быть 0520, потому что тогда последовательности в 1 и 4 столбцах должны кончаться на 0, но из оставшихся 2522 и 2550 такая только одна. Аналогично, в 4 строке не может быть 2522, потому что одна из оставшихся не кончается на 2. Значит, в нижней строке может оказаться только 2550, откуда 0520 окажется в 1 столбце, а 2522 — в 4.

Получается, что 1 строка в изначальной таблице имеет вид 20_0, а 3 строка — 20_2. Но в списке из условия есть только одна последовательность — 2020, которая подходит под такой шаблон 1 строки, и только одна — 2022, которая подходит в 3 строку.

В итоге, строки имеют следующий вид:

2020
5505
2022
2550,

откуда числа, добавленные Шрёдером, следующие: 0022, 0052, 5050, 5052.