

9 класс. Решения задач

1. Пусть x и y — натуральные числа такие, что $150x^2y$ и $60xy^2$ являются точными квадратами, а $300xy$ — точным кубом. Вычислите наименьшее возможное значение $x + y$.

ОТВЕТ. 21.

РЕШЕНИЕ. $150x^2y = 25x^2 \cdot 6y = (5x)^2 \cdot 6y$, значит $6y$ тоже должен быть полным квадратом, а тогда в разложении y должна быть хоть одна 2 и хоть одна 3. Похожим образом $60xy^2 = 4y^2 \cdot 15x = (2y)^2 \cdot 15x$, значит, в разложении x должна быть хоть одна 3 и хоть одна 5. Получается, что $y \geq 2 \cdot 3 = 6$, а $x \geq 3 \cdot 5 = 15$.

Остаётся убедиться, что $y = 6$, $x = 15$ подходят под условие задачи. Действительно, $300 \cdot 6 \cdot 15 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 30^3$. Значит, наименьшее значение $x + y$ — это $6 + 15 = 21$.

2. В каждой из восьми вершин куба написали ненулевое число, а на каждой грани — произведение четырёх чисел, расположенных в её вершинах. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди всех 14 написанных чисел?

ОТВЕТ. 12.

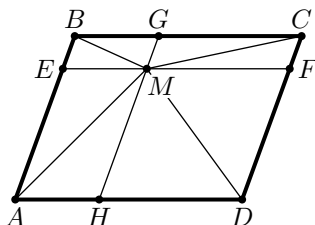
РЕШЕНИЕ. Оценка. Рассмотрим числа, находящиеся в вершинах, если они все отрицательные, то все числа на гранях будут положительными. В итоге всего 8 отрицательных чисел. Если же только одно число из чисел в вершинах будет положительным, то на гранях будет три положительных и три отрицательных, всего 10 отрицательных чисел. Рассмотрим случай, когда только два числа в вершинах положительные. Если эти вершины находятся на одном ребре куба, то отрицательных будет 8 (6 в вершинах и 2 на гранях). Если же вершины с положительными числами на одной грани, но не соединены ребром, то отрицательных тоже будет 10. Если же эти вершины диаметрально противоположные, то есть расположены на вершинах максимально далёких друг от друга, то отрицательных будет 12. Если же положительных чисел в вершинах будет хотя бы три, то всего отрицательных будет не больше 11.

Пример. Нужно поставить на двух диаметрально противоположных вершинах любые положительные числа, а во всех остальных вершинах любые отрицательные.

3. Остров имеет форму параллелограмма. Миша идёт по границе острова и проходит расстояние, равное периметру этого параллелограмма. Его четыре друга Дима, Игорь, Ренат и Саша высаживаются в одной точке внутри острова и идут к четырём разным вершинам параллелограмма по прямой (каждый к своей). Кто в итоге пройдёт большее расстояние, Миша или его друзья в сумме?

ОТВЕТ. Миша пройдёт большее расстояние.

РЕШЕНИЕ. Обозначим параллелограмм $ABCD$, а точку, в которую высаживаются друзья — M . Через точку M проведем отрезки EF и GH , параллельные сторонам параллелограмма (см. рисунок).



Они разобьют $ABCD$ на четыре меньших параллелограмма. Используя неравенство треугольника, получим: $MA < AH + HM$ и $MC < MF + FC$. Тогда, учитывая свойства параллелограмма, $MA + MC < AH + HM + MF + FC = AH + FD + HD + FC = AD + DC$. Аналогично, $MB + MD < AB + BC$. Таким образом, $MA + MB + MC + MD < P_{ABCD}$.

4. В танцевальном кружке 40 танцоров. Каждые два из них хотя бы раз участвовали в одном и том же номере. В каждом номере занято не более 20 танцоров. Какое наименьшее количество номеров мог поставить этот кружок?

ОТВЕТ. 6.

РЕШЕНИЕ. Пример. Разобьём всех танцоров на 4 группы по 10 человек и проведем 6 номеров, в каждом из которых задействованы какие-то две группы. Количество способов выбрать две группы из четырёх равно $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Оценка. Докажем, что пяти номеров не хватит. В сумме танцоры выступали не более, чем $20 \cdot 5 = 100$ раз. Если все они участвовали хотя бы в трёх номерах, то число выступлений не меньше $40 \cdot 3 = 120$. Значит, найдётся танцор, выступивший не более двух раз. Тогда он участвовал в одном номере не более, чем с $19 \cdot 2 = 38$ коллегами из остальных 39. Следовательно, для выполнения условия задачи пяти номеров недостаточно.

5. В каждую клетку таблицы 6×6 расставили по цифре от 1 до 6 так, чтобы они не повторялись в строках и столбцах. После этого между некоторыми парами соседних цифр поставили знаки неравенства, а затем сами цифры стёрли. Какое число могло стоять на месте вопросительного знака?

Найдите все варианты и докажите, что других нет.

A						
B			>	<		
C			<	>		
D			>	?	<	
E			<			
F						
	1	2	3	4	5	6

ОТВЕТ. 3.

РЕШЕНИЕ. Пронумеруем строки буквами от A до F сверху вниз, столбцы — цифрами от 1 до 6 слева направо. Заметим, что $B3 < B2$ и $B3 < B4$, причём $B2 \neq B4$, откуда $B3 < 5$. Аналогично, $C3 > 2$. Получаем $2 < C3 < B3 < 5$, откуда $C3 = 3$, $B3 = 4$. Теперь заметим, что $D2 > D3 > E3 > E4$, откуда $6 > D3 > E3 > 1$. Так как в 3 столбце уже есть цифры 3 и 4, $D3 = 5$, $E3 = 2$, откуда $D2 = 6$, $E4 = 1$. Далее, $C4 < 3$ и в 4 столбце уже есть 1, откуда $C4 = 2$. Заметим, что в строке D уже есть значения 6 и 5, а в столбце 4 — значения 1 и 2, а значит, $2 < D4 < D5 < 5$, откуда $D4$ может равняться только 3.